

# Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik

ZAMP

Journal of Applied Mathematics and Physics  
Journal de Mathématiques et de Physique appliquées

Editores: J. Ackeret E. Baldinger E. Baumann R. Mercier P. Scherrer E. Stiefel  
F. Stüssi W. Traupel H. Ziegler  
Redactor: R. Sängler

## INHALT - CONTENTS - SOMMAIRE

ČREMOŠNIK, G., und STRUTT, M. J. O.: Bestimmung von ebenen sowie von kreis- und kugelsymmetrischen Raumladungsfeldern mit Hilfe einfacher Widerstandsketten mit zusätzlichen Stromquellen . . . . .	329
FORD, H., and LIANIS, G.: Plastic Yielding of Notched Strips Under Conditions of Plane Stress . . . . .	360
GRÄNICHER, H., und SCHURTER, W.: Eine Stäbchenmethode zur DK-Messung, Anwendung auf $(\text{NH}_4)_2\text{H}_2\text{JO}_8$ bei 3 cm Wellenlänge . . . . .	382
WASOW, W.: Discrete Approximations to the Laplace Transformation . . . . .	401

## Kurze Mitteilungen - Brief Reports - Communications brèves

BOTTEMA, O.: First Integrals of Dynamical Systems . . . . .	418
---	-----

## Varia - Miscellaneous - Divers

9 <sup>e</sup> Assemblée du Comité suisse d'optique (CSO.) du 22 mai 1957 à Yverdon et Ste-Croix, résumé des communications . . . . .	420
Rechenautomat 704 IBM . . . . .	425
Arbeitstagung über die Ausbildung von Ingenieuren und Mathematikern in numerischer Mathematik unter Berücksichtigung der elektronischen Rechanlagen, München, Mai 1957. . . . .	426
Buchbesprechungen - Book Reviews - Notices bibliographiques . . . . .	427

ZAMP	Vol. VIII	Fasc. 5	Pag. 329—432	25. 9. 57
------	-----------	---------	--------------	-----------

# Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik

Journal of Applied Mathematics and Physics

Journal de Mathématiques et de Physique appliquées

ZAMP

Redactor: Prof. Dr. R. Sängler, Postfach Zürich 23 (Schweiz)

ZAMP erscheint regelmässig alle zwei Monate. *Redaktionsschluss*: spätestens 8 Wochen vor Erscheinungstermin. Manuskripte und alle die Redaktion betreffenden Zuschriften sind an den Redaktor zu richten. Manuskripte für *Kurze Mitteilungen* können, falls die Autoren auf Zustellung eines Korrekturabzuges verzichten, 6 Wochen vor Erscheinungstermin eingereicht werden. Die Beiträge werden in deutscher, englischer, französischer oder italienischer Sprache publiziert, doch soll jeder *Originalarbeit* und *Kurzen Mitteilung* eine kurze Zusammenfassung in einer andern als der Originalsprache beigegeben werden. *Abbildungsvorlagen* sollen reproduktionsfertig mit Reduktionsmaßstab versehen eingeliefert werden, hingegen soll die Beschriftung nur mit Bleistift, am besten auf einem lose vorgeklebten, durchsichtigen Papier, ausgeführt werden. Autoren von Originalarbeiten mit mehr als 16 Seiten Umfang haben von der 17. Seite an einen *Beitrag an die Satzkosten* von sFr. 20.- pro Seite und von der 25. Seite an einen solchen von sFr. 35.- pro Seite zu entrichten. Die Verfasser von *Zusammenfassenden Berichten*, *Originalarbeiten* und *Kurzen Mitteilungen* erhalten 50 Gratisseparata ohne Umschlag.

ZAMP is published regularly every two months. All papers must be in the hands of the editor at least 8 weeks before publication of the issue. Manuscripts and all other correspondence concerning contributions to the periodical should be addressed to the Editor. Manuscripts of *Brief Reports* can be submitted 6 weeks before publication of the issue, if the authors dispense with proof-reading. The contributions will be published in English, German, French, or Italian; to each *Original Paper* and *Brief Report* should be added a brief summary in a language other than the original one. Drawings and photographs for *illustrations* should be sent ready for reproduction with indication of the proposed reduction; lettering on the illustrations should be entered in pencil, preferably on a loosely attached transparent sheet. Authors of *Original Papers* exceeding 16 pages are requested to pay a *contribution of fr. 20.-* per page for pages 17-24, and of fr. 35.- per page for pages 25 and over. The authors of *Survey Articles*, *Original Papers*, and *Brief Reports* receive 50 free separata prints without cover.

ZAMP paraît régulièrement tous les deux mois. Derniers délais pour présenter les manuscrits: deux mois avant la parution de chaque numéro. Tous les manuscrits et toute correspondance relatifs à la rédaction sont à adresser au rédacteur. Les manuscrits pour des *communications brèves* peuvent être présentés six semaines avant la parution, si les auteurs renoncent à contrôler les épreuves. Les articles seront publiés en langues française, anglaise, allemande ou italienne; cependant, chaque *article original* et toute *communication brève* devront être accompagnés d'un résumé en une autre langue. Les *illustrations* doivent être prêtes à la reproduction et il faudra y indiquer l'échelle de réduction. La légende devra être inscrite au crayon, de préférence sur papier transparent, légèrement collé à l'illustration. Pour articles originaux qui dépassent 16 pages, une *contribution de fr.s. 20.-* par page doit être payée pour les pages 17-24; à partir de page 25 la contribution est de fr.s. 35.- par page. Les auteurs de *comptes rendus*, ainsi que ceux d'*articles originaux* et de *communications brèves* recevront 50 tirés à part sans couverture de leur article.

Jahresabonnement (6 Nummern): Inland sFr. 46.-, Ausland sFr. 58.- (DM 58.-), Einzelnummer sFr. 12.-

Annual subscription (6 issues): sFr. 58.-, single copy sFr. 12.-

Abonnement annuel (6 numéros): fr.s. 58.-, le numéro fr.s. 12.-

Postabonnement - Post-Office Subscription - Abonnement par office postal:

Belgien/Luxemburg, Dänemark, Finnland, Holland, Italien, Marokko, Norwegen, Portugal, Schweden

Inserate - Advertisements - Annonces:

$\frac{1}{4}$  Seite/page: Fr./DM 165.-,  $\frac{1}{2}$  Seite/page: Fr./DM 88.-,  $\frac{3}{4}$  Seite/page: Fr./DM 50.-

Alle Rechte, einschliesslich der Übersetzung und Reproduktion auf photostatischem Wege oder durch Mikrofilm, vorbehalten. - All rights, incl. translations and photostatic and microfilm reproduction, reserved. - Tous droits, y compris traductions et reproductions photostatiques et par microfilm, réservés.

© Birkhäuser Verlag, Basel, 1957

Printed in Switzerland



# Bestimmung von ebenen sowie von kreis- und kugelsymmetrischen Raumladungsfeldern mit Hilfe einfacher Widerstandsketten mit zusätzlichen Stromquellen

VON GREGOR ČREMOŠNIK UND MAX J. O. STRUTT, Zürich<sup>1)</sup>

## 1. Einleitung

Bei den Elektronenröhren treffen wir oft eindimensionale Felder an, wie das bei der ebenen Diode, der Zylinderdiode und bei kugelsymmetrischen Elektrodenystemen der Fall ist. Analoge Messungen kann man auch an *zwei*-dimensionalen Netzen (Widerstandsnetze für ebene und rotationssymmetrische Felder) ausführen [4, 5, 6]<sup>2)</sup>, doch wäre es von praktischen Gesichtspunkten aus eine bedeutende Aufwand- und Zeitersparnis, wenn man die Messungen an gewöhnlichen *Widerstandsketten* ausführen könnte. Dies ist durchaus möglich, wie folgende theoretische Betrachtungen sowie praktische Messungen an solchen Widerstandsketten zeigen sollen.

Die Poissonsche Gleichung für allgemeine eindimensionale Felder kann man in der Form

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{\nu}{r} \cdot \frac{\partial V}{\partial r} = \frac{\rho}{\epsilon} \quad (1)$$

schreiben. Hierin bezeichnet  $V$  das Potential,  $r$  die eindimensionale Koordinate,  $\rho$  die Raumladungsdichte und  $\epsilon$  die Dielektrizitätskonstante, die im Fall der Hochvakuum-Elektronenröhren gleich  $\epsilon_0$  ist. Auf der rechten Seite haben wir das positive Vorzeichen, da wir die negative Elektronenraumladungsdichte  $-\rho$  berücksichtigt haben. Nun kann man leicht einsehen:

- a) für  $\nu = 0$  erhalten wir die Raumladungsgleichung für das ebene eindimensionale Feld;
- b) für  $\nu = 1$  folgt die Raumladungsgleichung für das kreissymmetrische Feld;
- c) für  $\nu = 2$  folgt die Raumladungsgleichung für das kugelsymmetrische Feld.

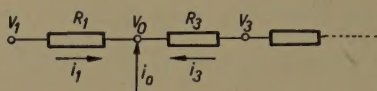
## 2. Die Widerstandskette als Analogiegerät

Eine Widerstandskette als Analogiegerät für die Lösung der eindimensionalen Raumladungsgleichung ist in Figur 1 skizziert worden. In der Reihenfolge der Widerstände sind jene mit ungeraden Indizes verwendet worden, in

<sup>1)</sup> Institut für höhere Elektrotechnik der ETH.

<sup>2)</sup> Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis, Seite 359.

Analogie zu der zweidimensionalen Anordnung, wo die zweite Richtung gerade Indizes erhält [4, 5]. Der Einspeisestrom  $i_0$  soll die vorhandene Raumladung nachbilden. Die Widerstandskette stellt eine Analogie zur Differenzenform der Poissonschen Gleichung (1) dar.



Figur 1

Widerstandskette zur Lösung von eindimensionalen Feldproblemen mit Nachbildung der Raumladung durch zusätzliche Speiseströme.

Die Differenzenform der zweiten Ableitung ist nach Figur 1

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} = \frac{V_1 + V_3 - 2 V_0}{d^2}, \quad (2)$$

wo  $d$  der gegenseitige Abstand benachbarter Maschenpunkte (zum Beispiel mit den Potentialen  $V_1$  und  $V_0$ ) ist. Für das Glied erster Ordnung der Gleichung (1) ist die Differenzenform

$$\frac{v}{r} \cdot \frac{\partial V}{\partial r} = \frac{v}{2 r d} (V_3 - V_1), \quad (3)$$

da man das betrachtete Intervall über zwei Maschenweiten ( $2d$ ) erstrecken muss, analog wie die zweite Ableitung. Somit kann man die Differentialgleichung (1) in der Differenzenform schreiben, indem man die Ausdrücke aus den Gleichungen (2) und (3) berücksichtigt:

$$\Delta V = \frac{1}{d^2} \left[ V_1 + V_3 - 2 V_0 + \frac{v d}{2 r} (V_3 - V_1) \right] = \frac{\rho}{\epsilon}. \quad (4)$$

Schreiben wir noch die Differenzengleichung (4) in der Form, die für die Analogiebestimmung vorteilhaft ist:

$$V_1 \left( 1 - \frac{v d}{2 r} \right) + V_3 \left( 1 + \frac{v d}{2 r} \right) - 2 V_0 - \frac{\rho}{\epsilon} d^2 = 0. \quad (5)$$

Um den Analogieausdruck zur Gleichung (5) zu erhalten, wenden wir den Kirchhoffschen Satz für die Ströme im Knotenpunkt  $V_0$  (Figur 1) an, indem wir die Widerstände  $R_1$  und  $R_3$  zu

$$R_1 = \frac{R}{1 - \frac{v d}{2 r}} \quad \text{und} \quad R_3 = \frac{R}{1 + \frac{v d}{2 r}} \quad (6)$$

wählen, wobei  $R$  ein noch zu bestimmender Widerstandswert ist. Nach Figur 1 folgt dann

$$V_1 \left( 1 - \frac{v d}{2 r} \right) + V_3 \left( 1 + \frac{v d}{2 r} \right) - 2 V_0 + i_0 R = 0. \quad (7)$$



Aus dem Vergleich der Gleichungen (5) und (7) erkennt man, dass sie vollkommen identisch sind, wenn der Einspeisestrom  $i_0$  zu

$$i_0 = -\frac{\rho}{\varepsilon} \cdot \frac{d^2}{R} \quad (8)$$

gewählt wird. Das negative Vorzeichen zeigt, dass der positive Strom aus der Kette herausfließen muss.  $R$  ist ein Widerstand, der im allgemeinen von der Lage des Punktes im Feld abhängt.

Nehmen wir nun nach Figur 1 an, dass der Punkt  $V_0$  ein allgemeiner Punkt  $m$  im Feld ist, so wird der Punkt  $V_3$  zum  $(m+1)$ -ten Punkt. Für den  $m$ -ten Punkt gilt nach Gleichung (6) mit der Widerstandsbezeichnung  $R = 1/A_m$

$$\frac{1}{R_1} = A_m \left(1 - \frac{\nu}{2m}\right) \quad \text{und} \quad \frac{1}{R_3} = A_m \left(1 + \frac{\nu}{2m}\right), \quad (9)$$

wobei das Verhältnis  $r/d$  mit  $m$  bezeichnet wurde. In Gleichung (9) ist  $R_3$  als oberer Widerstand für den Punkt  $m$  angenommen. Nun sollte sich der gleiche Widerstandswert für  $R_3$  ergeben, wenn wir ihn als unteren Widerstand für den Punkt  $(m+1)$  annehmen:

$$\frac{1}{R_3} = A_{m+1} \left(1 - \frac{\nu}{2(m+1)}\right). \quad (10)$$

Da aus den Gleichungen (9) und (10) der gleiche Wert für  $R_3$  folgen sollte, muss die allgemeine Beziehung für alle Felder gelten:

$$\boxed{\frac{A_m}{A_{m+1}} = \frac{(2m+2-\nu)m}{(2m+\nu)(m+1)}}. \quad (11)$$

Mit Hilfe dieser wichtigen Beziehung kann man dann die Werte der Widerstände sowie auch die Einspeiseströme  $i_0$  für verschiedene Widerstandsketten bestimmen:

a) Für das ebene, eindimensionale Feld ist  $\nu = 0$ . Wenn wir  $\nu = 0$  in die Gleichung (11) einsetzen, erhalten wir

$$\frac{A_m}{A_{m+1}} = 1, \quad \text{oder} \quad A_m = A_{m+1} = \frac{1}{R_0}. \quad (12)$$

In einer Widerstandskette für das ebene Feld sind alle Widerstände gleich, was schon von der Konstruktion des zweidimensionalen Widerstandsnetzes her [4, 5] bekannt ist. Mit der Widerstandsbezeichnung  $R = 1/A_m$  folgt aus Gleichung (8) für den Einspeisestrom der Wert

$$i_0 = -\frac{\rho}{\varepsilon} d^2 A_m. \quad (13)$$

Für das ebene Feld ist  $A_m = 1/R_0$ , wobei  $R_0$  der Wert der Widerstände in der Kette ist [vgl. Gleichung (12)]. Somit wird nach Gleichung (13) der Einspeisestrom

$$i_0 = -\frac{d^2}{\varepsilon R_0} \varrho. \quad (14)$$

Die Raumladung  $\varrho$  kann man durch die bekannte Stromdichte  $j$  und durch die Elektronengeschwindigkeit  $v$  ausdrücken:

$$\varrho = \frac{j}{v}. \quad (15)$$

Aus dem Energiesatz

$$\frac{1}{2} m v^2 = e V$$

( $e$  Betrag der Elektronenladung,  $m$  Elektronenmasse) erhalten wir die Geschwindigkeit

$$v = \sqrt{2 e_0 V}, \quad (16)$$

wobei  $e/m = e_0$  geschrieben wurde. Unter Berücksichtigung der Gleichungen (15) und (16) erhalten wir für den Einspeisestrom  $i_0$  nach Gleichung (14)

$$i_0 = -\frac{d^2}{\varepsilon \sqrt{2 e_0} R_0} \cdot \frac{j}{\sqrt{V}} = c \frac{j}{\sqrt{V}}. \quad (17)$$

b) Im Falle des kreissymmetrischen Feldes ist  $\nu = 1$ . Wenn wir  $\nu = 1$  in die Gleichung (11) einsetzen, erhalten wir die Beziehung

$$\frac{A_m}{A_{m+1}} = \frac{m}{m+1}$$

oder

$$\frac{A_m}{m} = \frac{A_{m+1}}{m+1} = A. \quad (18)$$

Günstig ist, alle Widerstände in der Kette auf den ersten Widerstand zu beziehen. In diesem Fall ist das der Widerstand zwischen dem Punkt an der Rotationsaxe und dem nächsten benachbarten Punkt. Aus der Gleichung (9) für den Widerstand  $R_1$  ( $m = 1$ ,  $\nu = 1$ ) folgt unter Berücksichtigung der Gleichung (18)

$$R_1 = \frac{2}{A} = R_0. \quad (19)$$

Somit folgt aus der Gleichung (9) für den Widerstand  $R_3$

$$R_3 = \frac{2}{3 A} = \frac{R_0}{3}. \quad (20)$$

Für  $m = 2$  erhalten wir

$$R_5 = \frac{R_0}{5},$$

und somit werden die Widerstände der Reihe nach

$$R_0, \frac{R_0}{3}, \frac{R_0}{5}, \frac{R_0}{7}, \dots \quad (21)$$

Für den Einspeisestrom folgt unter Berücksichtigung der Gleichungen (18) (19) aus der Gleichung (13) der Wert

$$i_0 = -\frac{2m}{R_0} \cdot \frac{d^2}{\varepsilon} \varrho. \quad (22)$$

Hierbei ist  $m = r/d$  und  $R_0$  als der gewählte erste Widerstand in der Kette bezeichnet. Für die Stromdichte  $j$  gilt im kreissymmetrischen Fall die Beziehung

$$j r = j_k r_k, \quad (23)$$

wobei  $j_k$  die bekannte Stromdichte an der Stelle  $k$  ist (zum Beispiel an der Kathode). Wenn wir die Gleichung (15) für die Raumladungsdichte  $\varrho$  in die Gleichung (22) einsetzen, erhalten wir unter Berücksichtigung der Gleichung (16) für den Einspeisestrom  $i_0$  den Wert

$$i_0 = -\frac{2d^2}{\varepsilon \sqrt{2\varepsilon_0} R_0} \cdot \frac{r_k}{d} \cdot \frac{j_k}{\sqrt{V}}. \quad (24)$$

c) Eine analoge Betrachtung für das kugelsymmetrische Feld ( $\nu = 2$ ) ergibt nach Gleichung (11) die Beziehung

$$\frac{A_m}{A_{m+1}} = \left( \frac{m}{m+1} \right)^2$$

oder

$$\frac{A_m}{m^2} = \frac{A_{m+1}}{(m+1)^2} = A. \quad (25)$$

Nach den Gleichungen (9) und (25) folgt für den ersten Widerstand  $R_1$  der Kette der Wert

$$R_1 = \frac{1}{A m (m-1)}. \quad (26)$$

Da der erste Punkt ausserhalb des Kugelzentrums  $m = 1$  ist, wird  $R_1 = \infty$ . Das Feld (Potential und Feldstärke) im Zentrum der Kugel nimmt auch unendliche Werte an. Da wir in Wirklichkeit bei einer Elektrode im Zentrum immer mit einem endlichen Halbmesser zu rechnen haben, stört das die Feldmessung nicht. Der erste Punkt der Kette liegt dann auf der zentralen Elektrode. Für den Widerstand  $R_3$  erhalten wir [nach Gleichung (9)]

$$R_3 = \frac{1}{A m (m+1)} = \frac{1}{2A} = R_0. \quad (27)$$



Hier ist es günstig, alle Widerstände auf den Widerstand  $R_3$  zu beziehen. Für  $m = 2$  folgt  $R_5 = R_0/3$ , und für höhere  $m$  werden die Widerstände der Reihe nach

$$\infty, R_0, \frac{R_0}{3}, \frac{R_0}{6}, \frac{R_0}{10}, \dots \quad (28)$$

Bestimmen wir noch die Einspeiseströme als Nachbildung der Raumladung. Für das kugelsymmetrische Feld erhalten wir analog zur Gleichung (22)

$$i_0 = -\frac{m^2}{2R_0} \cdot \frac{d^2}{\varepsilon} Q. \quad (29)$$

Für die Stromdichte gilt jetzt die Beziehung

$$j r^2 = j_k r_k^2. \quad (30)$$

Aus der Gleichung (29) folgt unter Berücksichtigung der Gleichungen (15), (16) und (30)

$$i_0 = -\frac{d^2}{2\varepsilon\sqrt{2e_0}R_0} \left(\frac{r_k}{d}\right)^2 \frac{j_k}{\sqrt{V}}, \quad (31)$$

wobei  $j_k$  wieder die bekannte Stromdichte bei  $r = r_k$  ist.

Hiermit haben wir die praktisch wichtigen Ausdrücke für die Anwendung der Widerstandsketten bei den Feldmessungen erhalten. Der grosse Vorteil der Widerstandsketten liegt in ihrer einfachen Konstruktion sowie in der leichten und raschen Durchführbarkeit der Messungen.

Bei der Bestimmung des Raumladungsfeldes treten oft Fehler vor den Elektroden auf. Wenn man das ganze Feld bei Nachbildung der Raumladung in Differentialflächenelemente aufteilt, sieht man, dass die Raumladung vor den Elektroden mit den Speiseströmen nicht berücksichtigt wird. Man muss die Speiseströme in den Punkten vor den Elektroden korrigieren oder die entsprechende Maschenweite vor den Elektroden zu  $d/2$  wählen (näheres in [15]). Dieses Ergebnis stammt von Herrn P. TSCHOPP in diesem Institut.

### 3. Ebene Diode

Als praktische Anwendung untersuchen wir zuerst den Fall der ebenen Diode. Bei ebenen Dioden kann man das Feld genau berechnen. So erhalten wir eine Möglichkeit, die praktischen Messergebnisse mit den genauen berechneten Werten zu vergleichen.

Bei der Bestimmung des Raumladungsfeldes ist das Verfahren der schrittweisen Näherung anzuwenden. Für die Bestimmung der Einspeiseströme als Nachbildung der Raumladung sollte die Stromdichte  $j$  sowie auch die Potentialverteilung  $V$  bekannt sein. Die Stromdichte  $j$  kann man aus der bekannten Anodenspannung  $U_a$  und aus der Geometrie der Anordnung berechnen. Die Potentialverteilung unter Berücksichtigung der Raumladung ist zunächst



nicht bekannt. Ausgehend von dem gemessenen statischen Feld  $V_0$  (ohne Raumladung) bestimmt man die entsprechende Raumladung nach Gleichungen (15) und (16) bzw. den Einspeisestrom nach Gleichung (17). Nach der Neubildung der Raumladung mit diesen Einspeiseströmen ändert sich die Potentialverteilung. Mit den neuen Potentialwerten bestimmt man wieder die Raumladung bzw. die notwendigen Einspeiseströme usw. Endlich ist die Änderung des Potentialverlaufs bzw. der einzuspeisenden Ströme so klein, dass sich die Potentialverteilung nicht mehr ändert. Das Verfahren nähert sich im allgemeinen sehr rasch einem Endwert. Bei kleiner Raumladung sind nur wenige Schritte notwendig, bei stärkerer Raumladung jedoch mehrere. Modelle mit Widerstandsketten haben nur wenige Messpunkte im Feld, so dass die Durchführung der Messungen wenig Zeit in Anspruch nimmt.

### 3.1. Austrittsgeschwindigkeit der Elektronen aus der Kathode gleich Null

Zunächst erläutern wir kurz den Einfluss der Vergrößerung im Modell bei der Bestimmung der Einspeiseströme. Aus der Differentialgleichung (1) geht folgendes hervor: Wenn wir die linearen Dimensionen  $n$ -mal vergrößern, so müssen wir auf der rechten Seite der Gleichung (1) durch  $n^2$  dividieren. Das bedeutet, dass man die Raumladung  $n^2$ -mal kleiner machen muss. Nur dann ist die Poissonsche Gleichung am Modell erfüllt. Der Einfluss von Fehlern in den Widerständen des Modells auf die Messergebnisse sowie der Einfluss der endlichen Maschenweite wurden an anderer Stelle erörtert [4, 5]. Die verwendeten Widerstände des Modells wurden alle innerhalb  $\pm 0,2\%$  auf die errechneten Nominalwerte eingestellt.

Der einfachste theoretische Fall einer ebenen Diode wird nur kurz behandelt. Die Stromdichte ist gegeben durch

$$j = 2,34 \cdot 10^{-6} \frac{U_a^{3/2}}{b^2}, \quad (32)$$

wobei  $U_a$  die Anodenspannung gegen die Kathode und  $b$  den Abstand zwischen den Elektroden bezeichnen. Der Potentialverlauf ist theoretisch durch

$$U = U_a \left( \frac{x}{b} \right)^{4/3} \quad (33)$$

gegeben. Als Beispiel nehmen wir eine ebene Diode mit

$$b = 100 \mu\text{m} = 10^{-2} \text{ cm} \quad \text{und} \quad U_a = 30 \text{ V}.$$

Am Modell wurde die gleiche Spannung und ein Abstand von 10 Maschenweiten zwischen den Elektroden angenommen. Die Vergrößerung wird:

$$n = \frac{20}{10^{-2}} = 2 \cdot 10^3.$$

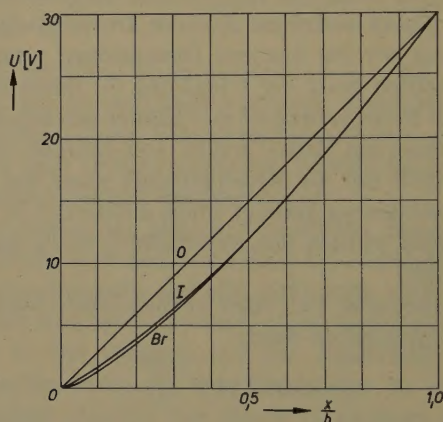
Aus der Gleichung (32) folgt für die Stromdichte

$$j = 3,845 \text{ A/cm}^2.$$

Diese Werte können bei praktischen Dioden nicht auftreten, die Stromdichte  $j$  ist stets viel kleiner, ebenso die Anodenspannung  $U_a$ . Durch obige Annahmen erhalten wir jedoch eine grössere Raumladung, was für die Untersuchung und Prüfung des Verfahrens günstig ist. Aus der Gleichung (17) können wir die erforderlichen Einspeiseströme bestimmen. Mit  $d = 2 \text{ cm}$  und  $R_0 = 3,5 \text{ k}\Omega$  wird  $c = 217,768$  [Gleichung (17)] und somit unter Berücksichtigung der Vergrößerung  $n$

$$i_0 = 54,442 \cdot \frac{3,845}{\sqrt{V}} \approx \frac{210}{\sqrt{V}} \mu\text{A}. \quad (34)$$

Die Resultate der schrittweisen Näherungen, ausgehend von dem Potentialverlauf (0) ohne Raumladung sind aus der Figur 2 ersichtlich. Für verschiedene



Figur 2

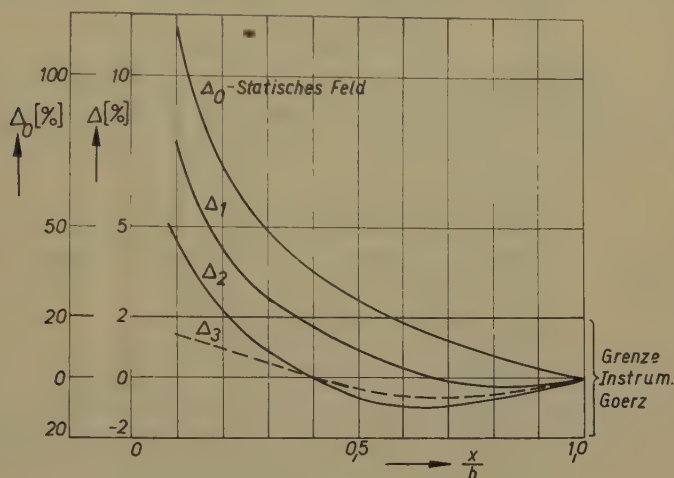
Schrittweise Näherungen bei den Messungen des Potentialverlaufs  $U$  einer ebenen Diode mit Austrittsgeschwindigkeit der Elektronen aus der Kathode gleich Null. Kurve  $O$ : Homogenes statisches Feld ohne Raumladung;  $I$ : erster Schritt nachbildung der Raumladung;  $Br$ : berechneter Potentialverlauf und zugleich dritter Näherungsschritt am Modell.

Abstände  $x/b$  können wir die theoretisch berechneten Potentialwerte  $Br$  nach Gleichung (33) sowie die nach der dritten Näherung erhaltenen Messwerte  $U$  in der folgenden Tabelle vergleichen:

$x/b$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
$Br$ [V]	1,392	3,51	6,03	8,85	11,91	15,18	18,65	22,27	26 07
$U$ [V]	1,41	3,54	6,08	8,85	11,85	15,00	18,50	22,10	26,00



In der Figur 2 ist nur die erste Näherung I und die letzte dritte Näherung, die mit dem berechneten Potentialverlauf  $B\gamma$  gut übereinstimmt, gezeichnet worden. Die zweite Näherung II weicht so wenig von der dritten Näherung bzw. von dem berechneten Verlauf ab, dass man sie schwer einzeichnen kann. Die prozentualen Fehler im Potentialverlauf für verschiedene Näherungen sind in der Figur 3 angegeben worden. Für die Abweichung des statischen Feldes  $\Delta_0$  gilt



Figur 3

Prozentualer, relativer Fehler  $\Delta$  [%] der schrittweisen Näherungen. Für  $\Delta_0$  (statisches homogenes Feld) gilt der linke vertikale Maßstab, für  $\Delta_1$  (nach dem ersten Schritt) gilt der rechte Maßstab, ebenso für  $\Delta_2$  (nach dem zweiten Schritt) und  $\Delta_3$  nach dem dritten Schritt. Eingezeichnet: die Grenze der Messgenauigkeit des verwendeten Universalinstrumentes.

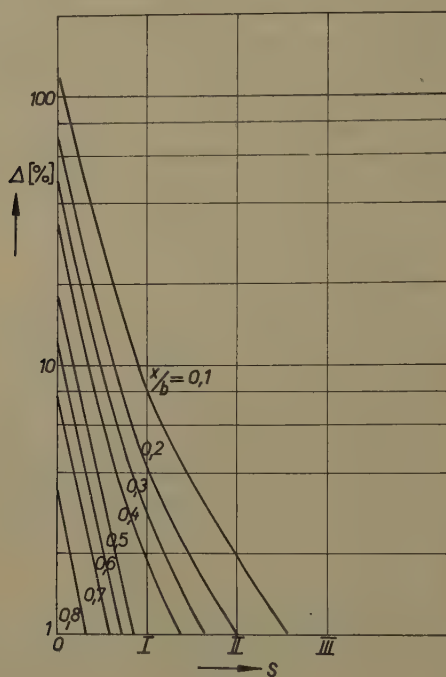
der zehnfache vertikale Maßstab (linker Maßstab in Figur 3). Aus dieser Figur sieht man deutlich, wie die Fehler bei den schrittweisen Näherungen jeweils herabgesetzt werden. Die Fehler der dritten Näherung  $\Delta_3$  fallen schon in den Bereich der Messgenauigkeit des verwendeten Universalinstrumentes, dessen Grenze in Figur 3 angedeutet ist.

Wenn wir die prozentualen relativen Fehler in Abhängigkeit von der Zahl der ausgeführten schrittweisen Näherungen aufzeichnen, erhalten wir den Verlauf nach Figur 4. Aus der Figur 4 geht deutlich hervor, dass die Abnahme des Fehlers  $\Delta$  nach den einzelnen Schritten ungefähr einer Exponentialkurve entspricht. Somit können wir mit guter Näherung diesen Verlauf durch die Funktion

$$\Delta = K \exp(-\alpha S) \quad (35)$$

darstellen, wobei  $S$  die Nummer der Näherung ( $S = 0, 1, \dots$ ) bezeichnet und der Exponent  $\alpha$  aus den Kurven hervorgeht. Für schwache Raumladung ergab

sich, dass der Exponent  $\alpha$  ungefähr den mittleren Wert 2 hat ( $1 < \alpha < 3$ ). Bei stärkerer Raumladung sinkt  $\alpha$  und erreicht Werte, die kleiner als 1 sind, wie wir im Abschnitt 3.2 sehen werden.



Figur 4

Prozentualer relativer Fehler  $\Delta$  [%] der schrittweisen Näherungen als Funktion der Nummer  $S$  des Schrittes: 0, I, II und III für die Maschenpunkte vor der Kathode mit  $x/b = 0,1, 0,2 \dots$  (Lage des Punktes als Parameter).

### 3.2. Konstante Austrittsgeschwindigkeit der Elektronen aus der Kathode

Betrachten wir den Fall, wo sich zwischen Kathode und Anode infolge der vorhandenen Raumladung ein Potentialminimum ausbildet, so dass der Potentialwert im Minimum  $U_m > 0$  ist und die Anodenstromdichte  $j_2$  gleich der Kathodenstromdichte  $j$  (keine rückkehrenden Elektronen).

Für die theoretische Betrachtung ist es vorteilhaft, eine normierte Stromdichte  $j^*$  einzuführen:

$$j^* = \frac{j}{j_2}, \quad (36)$$

wobei die Stromdichte  $j_2$  nach der Gleichung (32)

$$j_2 = 2,34 \cdot 10^{-6} \frac{U_2^{3/2}}{b^2} \quad (37)$$



ist,  $j$  die vorhandene Stromdichte in der Diode, unter Berücksichtigung der konstanten Austrittsgeschwindigkeit der Elektronen aus der Kathode, und  $U_2$  die Anodenspannung. Damit der obige Fall mit dem Potentialminimum zwischen Kathode und Anode vorliegt, darf die Stromdichte  $j$  nicht beliebig gesteigert werden. Die bekannte Theorie [1, 2, 3] ergibt, dass die maximale Stromdichte nach Gleichung (36)

$$j_{max}^* = \left(1 + \sqrt{\frac{U_1}{U_2}}\right)^3 \quad (38)$$

beträgt. Dabei bedeutet  $U_1$  die Spannung an der Kathode, die der konstanten Austrittsgeschwindigkeit entspricht, und  $U_2$  die Anodenspannung im Falle, dass  $U_2 > U_1$  ist. Für die Spannung des Potentialminimums folgt dann

$$U_m = U_2 \frac{U_1/U_2}{(1 + \sqrt{U_1/U_2})^2} \quad (39)$$

und für die Lage

$$\frac{x_m}{b} = 1 - \frac{1 + 3\sqrt{U_1/U_2}}{(1 + \sqrt{U_1/U_2})^3} \quad (40)$$

Somit ist es möglich, nach den Gleichungen (38), (39) und (40) aus den vorgegebenen Elektrodenspannungen  $U_1$  und  $U_2$  die noch zulässige Stromdichte, die Spannung des Potentialminimums sowie seine Lage zu berechnen.

Als Beispiel nehmen wir eine ebene Diode mit dem Elektrodenabstand  $b = 100 \mu\text{m}$ , mit einer Anodenspannung  $U_2 = 25 \text{ V}$  und mit der Kathodenspannung

$$U_1 = 0,01 \text{ V} \quad U_2 = 0,25 \text{ V}.$$

Aus der Gleichung (37) folgt die Stromdichte

$$j_2 = 2,34 \cdot 10^{-2} \cdot 125 = 2,925 \text{ A/cm}^2.$$

Wenn wir den Fall der maximal zulässigen Stromdichte nehmen, so erhalten wir aus der Gleichung (38)

$$j_{max}^* = (1 + 0,1)^3 = 1,331$$

und aus der Gleichung (36) die vorhandene Stromdichte  $j$

$$j = 2,925 \cdot 1,331 = 3,8932 \text{ A/cm}^2.$$

Für die Spannung des Potentialminimums erhalten wir nach der Gleichung (39)

$$U_m = 0,2066 \text{ V}$$

und für die Lage in bezug auf den Elektrodenabstand  $b$  nach Gleichung (40)

$$\frac{x_m}{b} = 0,0233.$$

Da die Anodenspannung in bezug auf die Kathodenspannung sehr gross ist, tritt ein Spannungsminimum in der Nähe der Kathode auf. Wir haben einen Fall, wo die Raumladung nicht gross ist.

Bei der Berechnung des Potentialverlaufs integrieren wir die Poissonsche Gleichung

$$\frac{d^2 U}{dx^2} = \frac{\varrho}{\epsilon_0} = \frac{j}{\sqrt{2} \epsilon_0 \epsilon_0 \sqrt{U}} \quad (41)$$

Unter Berücksichtigung der Integrationskonstanten ergibt sich für den gesuchten Potentialverlauf die Formel [2, 3]

$$\left. \begin{aligned} & \sqrt{U} = -\sqrt{U_m} \\ & + \left\{ \sqrt{U_m^3} + (x - x_m)^2 \frac{j}{2a} + \left[ (x - x_m)^2 \frac{j}{a} \left( U_m^3 + \frac{j}{4a} (x - x_m)^2 \right) \right]^{1/2} \right\}^{1/3} \\ & + \left\{ \sqrt{U_m^3} + (x - x_m)^2 \frac{j}{2a} - \left[ (x - x_m)^2 \frac{j}{a} \left( U_m^3 + \frac{j}{4a} (x - x_m)^2 \right) \right]^{1/2} \right\}^{1/3} \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

wobei

$$a = \frac{4}{9} \epsilon_0 \sqrt{2} \epsilon_0 = 2,34 \cdot 10^{-6} \text{ A/V}^{3/2}.$$

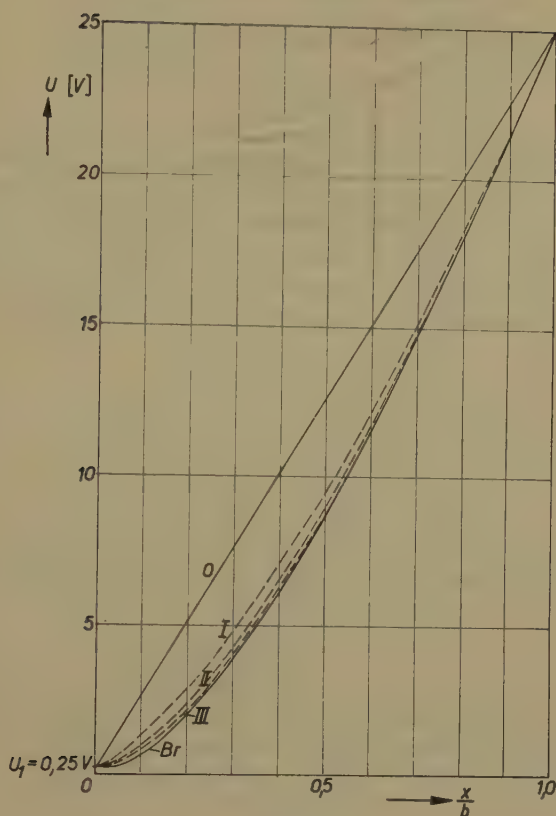
ist. Die praktische Berechnung des Raumladungsfeldes ist somit schwierig und verlangt sehr genaue numerische Rechnungen wegen des Differenzgliedes in der Gleichung (42). Im Vergleich hierzu ist die Ermittlung des Potentialverlaufs mit Modellmessungen an der Widerstandskette mit den zusätzlichen Einspeiseströmen viel einfacher und weniger zeitraubend.

Als Modell nehmen wir 10 Maschenweiten zwischen den Elektroden mit einer Vergrösserung  $n = 2 \cdot 10^3$ . Nach der Gleichung (17) unter Berücksichtigung der Vergrösserung folgt dann für die Einspeiseströme

$$i_0 = 54,442 \cdot \frac{j}{\sqrt{U}} \approx \frac{212}{\sqrt{U}} \mu\text{A}. \quad (43)$$

Nun wurde das beschriebene Verfahren der schrittweisen Näherungen angewandt. Die Messergebnisse sind in der Figur 5 gegeben worden. Der fünfte Schritt bzw. die fünfte Korrektur der Raumladung ergibt einen Potentialverlauf, der sehr gut mit dem berechneten nach Gleichung (42) übereinstimmt. In der nachfolgenden Tabelle sind die gemessenen Werte  $U$  nach der fünften schrittweisen Näherung sowie die berechneten Werte  $U_r$  nach Gleichung (42) zum Vergleich angegeben worden. Zuletzt ist noch der prozentuale Fehler  $\Delta$  angegeben [Abweichung der gemessenen Werte von den genau berechneten Werten nach Gleichung (42)]:





Figur 5

Potentialverlauf  $U$  [V] bei schrittweisen Messungen im Modell einer ebenen Diode mit konstanter Austrittsgeschwindigkeit der Elektronen aus der Kathode  $U_1 = 0,01 U_2$ . O: homogenes Feld; I: erste Näherung bei Nachbildung der Raumladung; II: zweite Näherung ... usw. Br: berechneter Verlauf nach Gleichung (42) und zugleich fünfte Näherung.

$x/b$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
$U$ [V]	0,64	2,03	3,93	6,29	8,85	11,70	14,90	18,25	21,45
$U_r$ [V]	0,63	2,01	3,90	6,25	8,81	11,66	14,95	18,32	21,50
$\Delta$ [%]	1,5	1	0,8	0,6	0,5	0,4	0,3	—	—

Der grösste Fehler tritt für die Punkte vor der Kathode auf. Wenn eine sechste Korrektur der Raumladung bzw. des Einspeisestromes in den Punkten vor der Kathode ausgeführt würde, so wäre der Fehler überall unter 1%.

Untersuchen wir noch ein Beispiel mit grösserer Austrittsgeschwindigkeit der Elektronen und somit auch mit grösserer Raumladung. Die Anodenspannung soll unverändert bleiben:  $U_a = 25$  V. Die Kathodenspannung, die der

Austrittsgeschwindigkeit der Elektronen aus der Kathode entspricht, wird jetzt

$$U_1 = 0,2 U_2 = 5 \text{ V}.$$

Praktisch könnte dieses Beispiel in Mehrgitterröhren vorkommen, wo die Schirmgitterebene als neue Emissionskathode angenommen werden kann und die Elektronen dann grosse Emissionsgeschwindigkeiten haben. Die Stromdichte, welche als Normierungsgrösse dient, bleibt gegen das vorige Beispiel unverändert  $j_2 = 2,925 \text{ A/cm}^2$ , da die Anodenspannung  $U_2$  die gleiche ist. Die maximal zulässige Stromdichte ergibt sich aus der Gleichung (38)

$$j_{max}^* = (1 + \sqrt{0,2})^8 = 3,03,$$

und somit aus Gleichung (36) die vorhandene Stromdichte in der Röhre

$$j_2 = 2,925 \cdot 3,03 = 8,863 \text{ A/cm}^2.$$

Aus der Gleichung (39) erhalten wir für die Spannung im Potentialminimum den Wert  $U_m = 2,4 \text{ V}$  und für die Lage des Minimums in bezug auf den Elektrodenabstand

$$\frac{x_m}{b} = 0,227.$$

Das Spannungsminimum liegt jetzt weiter von der Kathode entfernt, und gegen die Kathode weist dieser Punkt eine negative Spannung auf im Betrage von

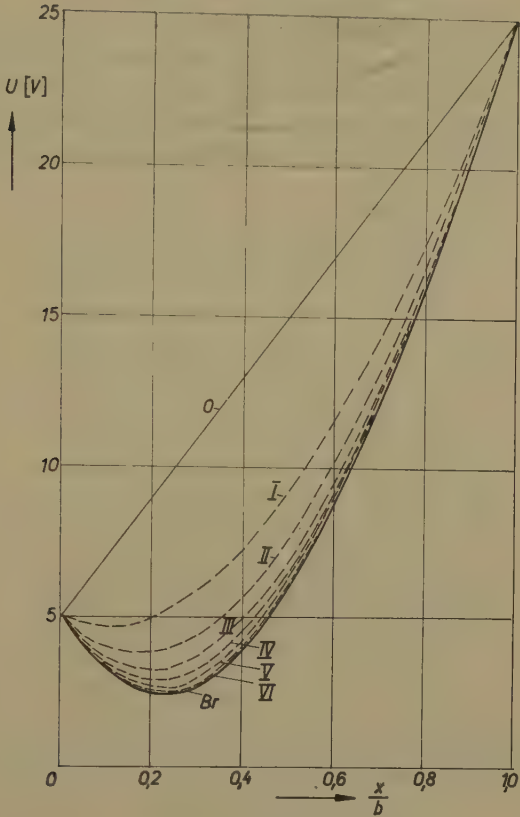
$$5 - 2,4 = 2,6 \text{ V}.$$

Die Vergrösserung des Elektrodenabstandes  $b = 10^{-2} \text{ cm}$  am Modell mit 10 Maschenweiten beträgt  $n = 2 \cdot 10^3$ . Nach der Gleichung (17) folgt somit für die Berechnung der Speiseströme als Nachbildung der vorhandenen Raumladung in der Röhre:

$$i_0 = 54,442 \frac{j}{\sqrt{U}} = \frac{482,5}{\sqrt{U}} \mu\text{A}. \quad (44)$$

Den Potentialverlauf können wir mit Hilfe der Gleichung (42) berechnen. Die Messergebnisse der schrittweisen Näherungen sind in der Figur 6 gezeichnet. Aus dem Verlauf sieht man deutlich, wie die Näherungen nach 7 Schritten zu dem genauen Verlauf führen. Bei den ersten zwei Schritten mussten alle Speiseströme korrigiert werden, beim dritten Schritt war bei den letzten zwei Punkten vor der Anode eine Korrektur nicht mehr notwendig. Bei dem fünften Schritt waren nur in der Hälfte vor der Kathode, wo das Potentialminimum liegt, noch Korrekturen der Einspeiseströme erforderlich.





Figur 6

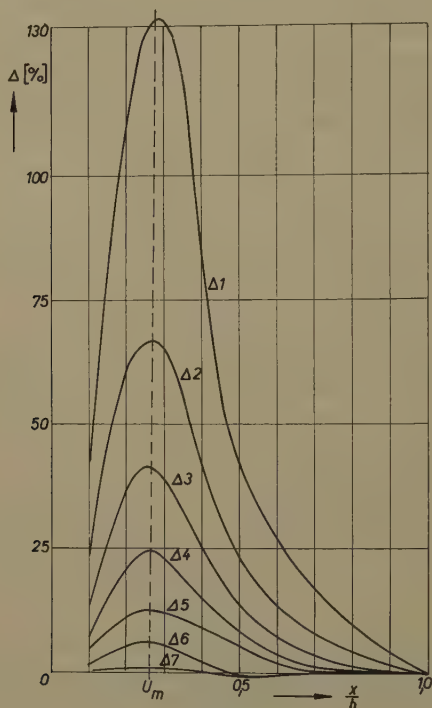
Potentialverlauf  $U$  [V] bei schrittweisen Näherungen in einer ebenen Diode mit konstanter Austrittsgeschwindigkeit der Elektronen aus der Kathode  $U_k = 0,2 U_a$ . Gleiche Bezeichnungen wie in Figur 5.

In der nachfolgenden Tabelle sind die nach Gleichung (42) berechneten Potentialwerte sowie die Messwerte  $U$  des letzten, siebenten Schrittes gegeben worden. In der letzten Zeile ist noch der prozentuale Fehler  $\Delta$  berechnet worden.

$x/b$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
$U_r$ [V]	3,24	2,40	2,66	3,94	6,15	8,74	12,25	16,00	20,25
$U$ [V]	3,26	2,42	2,68	3,96	6,10	8,71	12,25	16,05	20,25
$\Delta$ [%]	0,6	0,8	0,8	0,5	-0,8	-0,4	—	—	—

Der Fehler ist somit kleiner als  $\pm 1\%$ , was eine gute und praktisch hinreichende Genauigkeit bedeutet. Dabei ist noch zu sagen, dass der Fehler nicht

auf die gesamte Spannung zwischen den Elektroden bezogen wurde, wie es oft geschieht, sondern in bezug auf den genau berechneten Wert in dem entsprechenden Punkt. Der obige Fehler wäre sonst noch viel kleiner. Aus den Messergebnissen folgt deutlich, dass man mit dem beschriebenen Verfahren der schrittweisen Näherungen den Betrag und die Stelle des auftretenden Poten-

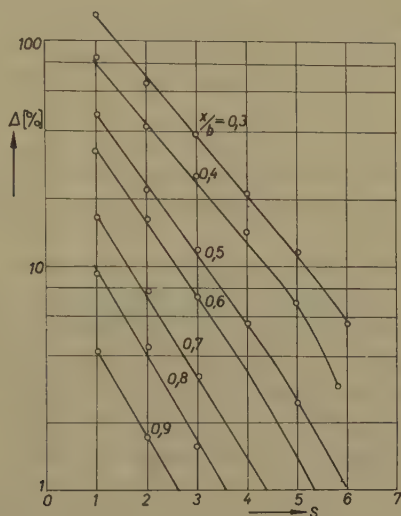


Figur 7

Prozentualer Fehler  $\Delta$  [%] der schrittweisen Näherungen der Figur 6 als Funktion des Abstandes von der Kathode:  $x/b$ . Bezeichnungen der Kurven  $\Delta 1$ : nach der ersten Näherung, usw.

tialminimums sowie den gesamten Potentialverlauf sehr gut und rasch bestimmen kann. Die Berechnung des Potentialverlaufs ist kompliziert, die Resultate sind praktisch auch mit Fehlern gleicher Grössenordnung behaftet, wie sie sich beim letzten obigen Schritt ergeben. Die prozentualen Fehler  $\Delta$  für verschiedene Schritte sind in Figur 7 veranschaulicht worden,  $\Delta_1$  bedeutet den Fehler nach dem ersten Schritt usw. Aus dem Kurvenverlauf geht die rasche Verringerung des Fehlers deutlich hervor. Der maximale Fehler tritt in der Nähe des Potentialminimums auf. Wenn wir den prozentualen Fehler als Funktion der Nummer  $S$  der schrittweisen Näherung aufzeichnen, erhalten wir die Figur 8. Da die Raumladung grösser ist als im vorherigen Fall, findet die Abnahme des

Fehlers langsamer statt als dort, was zu einem Exponent  $\alpha$  nach Gleichung (35) führt, der kleiner als 1 ist. Für die Punkte direkt vor der Kathode ist die relative Abnahme am geringsten. Hier ist  $\alpha$  am kleinsten ( $\alpha \sim 0,7$ ). Für die Punkte vor der Anode, die in der Figur 8 dargestellt sind ( $x/b = 0,7, \dots, 0,9$ ), ist die Abnahme stärker, so dass in diesem Fall der Exponent  $\alpha$  fast den Wert 1 erreicht.



Figur 8

Prozentualer Fehler  $\Delta$  [%] der schrittweisen Näherungen als Funktion der Zahl  $S$  der Schritte ( $S = 0, 1, 2, \dots, 7$ ), für die Maschenpunkte vor der Anode ( $x/b = 0,5, \dots, 0,9$ ).

### 3.3. Maxwell'sche Geschwindigkeitsverteilung der emittierten Elektronen

Für die Nachbildung des Einflusses der Maxwell'schen Geschwindigkeitsverteilung der emittierten Elektronen aus der Kathode an Widerstandskettenmodellen wurde ein approximatives Verfahren entwickelt:

1. Man bestimmt die Temperaturspannung  $U_T$  der Kathode, die dem quadratischen Mittelwert  $v_T$  der thermischen Geschwindigkeit entspricht, aus den Energiegleichungen, wobei die Kathodentemperatur  $T$  als bekannt vorausgesetzt wurde:

$$k T = e_1 U_T = \frac{m v_T^2}{2}. \quad (45)$$

Hierin ist  $k$  die Boltzmann'sche Konstante  $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$  J/Grad abs.

2. Nun verwendet man das entwickelte Verfahren für konstante Austrittsgeschwindigkeit der Elektronen, indem man im Modell  $U_1 = U_T$  und  $U_2 = U_T + U_a$  nachbildet, wie dies im Abschnitt 3.2 durchgeführt wurde.



3. Aus dem Endpotentialverlauf (nach der letzten schrittweisen Näherung), welcher mit der vorausgesetzten konstanten Geschwindigkeit  $U_T$  erhalten wurde, bestimmt man die Korrektur der Speiseströme vor der Kathode bis zum Potentialminimum nach der vorgegebenen Maxwellschen Geschwindigkeitsverteilung, indem man den rückkehrenden Elektronen Rechnung trägt.

4. Da somit nicht alle Elektronen zur Anode gelangen, wie das bei konstanter Austrittsgeschwindigkeit der Fall ist, muss man die Speiseströme verringern nach der Gleichung

$$i_a = i_0 - F i_0, \quad (46)$$

wobei  $i_0$  der Speisestrom vor der Korrektur ist, der aus dem bekannten Potentialverlauf bei konstanter Austrittsgeschwindigkeit der Elektronen folgt, und  $F$  ein Faktor, den man bestimmen muss aus dem am Modell berücksichtigten zurückkehrenden Strom.

Man integriert die Maxwellsche Verteilungsfunktion jeweils von einem betrachteten Punkt zwischen Kathode und Spannungsminimum bis zum Spannungsminimum. Die zurückkehrenden Elektronen tragen in diesen Punkten *zweimal* zur Raumladung bei. Das Verfahren der schrittweisen Näherung wiederholt man, bis die Integration das richtige vorgegebene Verhältnis zwischen dem Anodenstrom und dem Sättigungsstrom ergibt. Das Verfahren soll an einem praktischen Beispiel erläutert werden.

Im Gebiet hoher Temperaturen der Kathode (über  $1000^\circ \text{ K}$ ) kann man mit guter Näherung annehmen, dass die emittierten Elektronen eine Maxwellsche Geschwindigkeitsverteilung aufweisen. Die Zahl der durch eine Flächeneinheit pro Zeiteinheit hindurchtretenden Elektronen sei  $N_0$ . Dann ist die Anzahl  $dN$  dieser Elektronen, deren Geschwindigkeit zwischen  $v$  und  $v + dv$  liegt,

$$dN = N_0 \frac{m v}{k T} \exp\left(-\frac{m v^2}{2 k T}\right) dv,$$

oder, unter Berücksichtigung der Gleichung (45),

$$dN = N_0 \frac{1}{U_T} \exp\left(-\frac{U}{U_T}\right) dU. \quad (47)$$

Nehmen wir an, dass die Zahl  $N_0$  der Elektronen der Sättigungsstromdichte  $j_s$  entspricht. Die Zahl der zurückkehrenden Elektronen erhalten wir durch Integration

$$N_r = N_0 \int_0^{U_m/U_T} \exp(-V) dV = N_0 \left[1 - \exp\left(-\frac{U_m}{U_T}\right)\right], \quad (48)$$

wobei  $U_m$  die Spannung im Potentialminimum ist und  $V = U/U_T$  im Integral substituiert wurde. Somit ist dann die Zahl der Elektronen, die zur Anode

gelangen,

$$N = N_0 \exp\left(-\frac{U_m}{U_T}\right). \quad (49)$$

Da die Zahl  $N_0$  der Elektronen der Sättigungsstromdichte entspricht, erhalten wir für die Anodenstromdichte

$$j_a = \frac{N}{N_0} j_s \quad (50)$$

und für die Stromdichte der zurückkehrenden Elektronen

$$j_r = \frac{N_r}{N_0} j_s. \quad (51)$$

Somit gilt

$$N_0 = N + N_r$$

und analog

$$j_s = j_a + j_r. \quad (52)$$

Als Beispiel betrachten wir eine ebene Raumladungsdiode mit der Sättigungsstromdichte  $j_s = 100 \text{ mA/cm}^2$  und einer Anodenstromdichte  $j_a = 40 \text{ mA/cm}^2$ . Diese Zahlen haben keine praktische Bedeutung in Röhren, sondern sollen nur als Rechenbeispiel dienen. Die Temperatur der Pastekathode sei  $900^\circ\text{C}$  oder  $1173^\circ\text{K}$  mit einer Kathodenoberfläche von  $1,5 \text{ cm}^2$ . Der Abstand zwischen Anode und Kathode sei  $b = 50 \mu\text{m} = 5 \cdot 10^{-3} \text{ cm}$ .

Die Lösung der Poissonschen Gleichung (41) mit Berücksichtigung der Maxwell'schen Geschwindigkeitsverteilung der emittierten Elektronen ist nur unter numerischer Auswertung der letzten Integration möglich. Die Resultate stammen von I. LANGMUIR [7], der die Integrale in Tabellen ausgewertet hat. Diese Tabellen wurden von P. H. J. A. KLEYNEN [10] vervollkommenet. Eine Erweiterung der Ausführungen von I. LANGMUIR hat A. VAN DER ZIEL [11] gebracht. Ohne auf die Resultate der Ausführungen näher einzugehen, geben wir nur die berechneten Werte für ein angenommenes Beispiel an. Die Temperaturspannung der Kathode erhalten wir aus

$$U_T = 0,86 \cdot 10^{-4} T \approx 0,10 \text{ V}.$$

Für die Spannung im Potentialminimum gilt

$$U_m = U_T \ln \frac{j_s}{j_a} = 0,092 \text{ V}$$

und für die Anodenspannung

$$U_a = (\eta_a - \eta_m) \frac{T}{11605} = 0,064 \text{ V}.$$

$\eta_a$  ist ein aus den genannten Tabellen entnommener Wert und  $\eta_m = U_m/U_T$ .

Für die Lage des Potentialminimums erhalten wir mit Hilfe der Tabellen

$$\frac{x_m}{b} = \xi_m^- \frac{l}{b} = 0,338.$$

Die berechneten Spannungen sind klein. Deshalb wurden im Modell alle Spannungen mit dem Faktor 50 multipliziert. Somit ergibt sich:

$$U_T = 5 \text{ V}, \quad U_a = 3,2 \text{ V} \quad \text{und} \quad U_m = -4,585 \text{ V}.$$

Nach dem beschriebenen Verfahren betrachten wir zuerst den Fall konstanter Austrittsgeschwindigkeit mit:  $U_1 = 5 \text{ V}$  und  $U_2 = U_T + U_a = 8,2 \text{ V}$  (vgl. Abschnitt 3.2). Für die Stromdichte erhalten wir nach den Gleichungen (36), (37) und (38)

$$j = j_2 j_{max}^* = 12,4 \text{ A/cm}^2.$$

Die Rechnung ergibt dann  $U_m = 1,58 \text{ V}$  oder die Spannung gegen die Kathode  $U_m = -5 + 1,58 = -3,42 \text{ V}$  und für die Lage des Potentialminimums  $x_m/b = 0,404$ . Die obige Spannung des Potentialminimums unterscheidet sich von der Spannung, die aus der Rechnung mit Maxwellschen Geschwindigkeitsverteilung der emittierten Elektronen folgt, um mehr als 25%. Die mittlere thermische Geschwindigkeit müsste um einen Faktor vergrößert werden, damit die Übereinstimmung besser würde. Diese notwendige Vergrößerung kann man nachher bei der Korrektur infolge der Maxwellschen Verteilung berücksichtigen, wie in dem nachfolgenden Beispiel gezeigt wird, indem man die Stromdichte vergrößert.

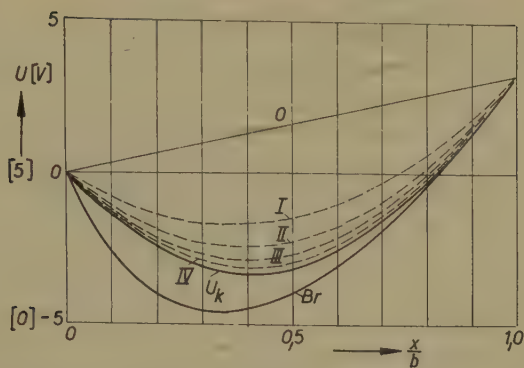
Im Modell wurden 10 Maschenweiten für den Abstand zwischen den Elektroden gewählt. Die Vergrößerung beträgt  $n = 20/(5 \cdot 10^{-3}) = 4 \cdot 10^3$ . Aus der Gleichung (17) folgt unter Berücksichtigung der Vergrößerung für den Einspeisestrom

$$i_0 = \frac{217,768}{16} \cdot \frac{j}{\sqrt{U}} \approx \frac{170}{\sqrt{U}} \mu\text{A}. \quad (53)$$

Die Messresultate der schrittweisen Näherungen sind in der Figur 9 gegeben worden. Nach dem fünften Schritt kommen wir zur Endkurve, die sehr gut mit dem gerechneten Verlauf  $U_k$  für die genannte konstante Austrittsgeschwindigkeit übereinstimmt. Zum Vergleich ist in Figur 9 auch die gerechnete Kurve  $B_r$  bei Berücksichtigung der Maxwellschen Geschwindigkeitsverteilung eingezeichnet. Man erkennt gleich die grosse Abweichung der beiden Kurven  $U_k$  und  $B_r$  voneinander.

Nun wurde die  $M$ -Verteilung (Maxwellsche Geschwindigkeitsverteilung) der emittierten Elektronen berücksichtigt. Der erste Schritt wurde so durchgeführt, dass  $j_s = j_a$  angenommen wurde. Für die Punkte vor der Kathode bis zum Potentialminimum wurde der Speisestrom  $i_0$  gewählt, der aus der Span-



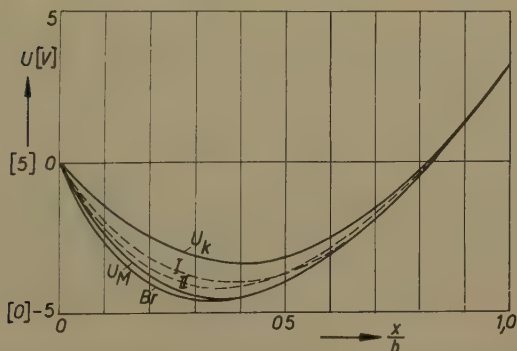


Figur 9

Potentialverlauf  $U$  [V] bei schrittweisen Näherungen im Modell einer ebenen Diode mit konstanter Austrittsgeschwindigkeit der Elektronen aus der Kathode  $U_1 = U_T$ . I: erste Näherung... usw.  $U_k$  letzte, fünfte Näherung, die mit dem berechneten Verlauf gut übereinstimmt. Kurve  $Br$ : berechneter Potentialverlauf bei Maxwell'scher Geschwindigkeitsverteilung ( $M$ -Verteilung) der emittierten Elektronen.

nung des Minimums nach Gleichung (53) folgt. Bei der Berücksichtigung der zurückkehrenden Elektronen, die zweimal zu der Raumladung beitragen, wurden die Stromdichte bzw. die Speiseströme vergrößert. Wenn wir die Abkürzung  $V = U/U_T$  einführen, ergibt sich nach Gleichung (48) die Zahl der zurückkehrenden Elektronen zwischen zwei Punkten  $V_1$  und  $V_2$

$$N_r = N_0 \int_{V_1}^{V_2} \exp(-V) dV = N_0 [\exp(-V_1) - \exp(-V_2)]. \quad (54)$$



Figur 10

Schrittweise Näherungen bei Berücksichtigung der  $M$ -Verteilung.  $U_k$ : letzte Näherung nach Figur 9 mit konstanter Austrittsgeschwindigkeit der emittierten Elektronen;  $U_M$ : letzte Näherung mit Berücksichtigung der  $M$ -Verteilung;  $Br$ : theoretisch berechneter Potentialverlauf.

Die Korrektur wurde erhalten, indem der Speisestrom vor dem Potentialminimum um den Faktor vergrößert wurde, der aus der Gleichung (54) hervorgeht. Für einen bestimmten Punkt  $V_1$  muss man die Integration bis  $U_m$  bzw.  $V_m$  ausführen. Dann ersetzt  $V_m$  die obere Grenze  $V_2$  in der Gleichung (54). Die schrittweisen Näherungen und die gemessenen Potentialkurven bei Berücksichtigung der  $M$ -Verteilung sind in Figur 10 gezeichnet worden. Die Potentialkurve  $U_k$  ist der erzielte Potentialverlauf bei Annahme einer konstanten Austrittsgeschwindigkeit  $U_T$ , und  $U_M$  ist die letzte (dritte) Näherung bei Berücksichtigung der  $M$ -Verteilung. Die Methode soll jetzt praktisch bei der dritten Näherung erläutert werden. Als Grundlagen der Korrektur dienen die gemessenen Potentialwerte der vorletzten zweiten Näherung. In der Tabelle sind nur die Werte von der Kathode bis zum Potentialminimum angegeben:

$x/b$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
$U$ [V]	2,18	3,48	4,10	4,12	3,68
$V$	0,436	0,696	0,820	0,824	
$\exp(-V)$	0,647	0,499	0,440	0,439	
$\exp(-V) - \exp(-V_m)$	0,208	0,060	0,001	—	
$i_0$ ( $\mu A$ )	255	202	184	180	

Aus der Gleichung (50) folgt unter Berücksichtigung der Gleichung (49)

$$j_a = 0,439 j_s.$$

Da die vorgegebenen Werte  $j_a = 0,4 j_s$  ergeben, ist somit der Anodenstrom noch zu gross. Ein weiterer Schritt ist notwendig, um das vorgegebene Verhältnis 0,4 zu erhalten.

Aus der vorletzten Zeile der obigen Tabelle für den Punkt  $x/b = 0,1$  ersieht man, dass nur 0,208  $j_s$  als zurückkehrender Strom erfasst wird. Somit wird die Korrektur des Anodenstroms bzw. der zugehörigen Speiseströme nach Gleichung (46) mit  $F = 0,208$

$$i_a = i_0 - 0,208 i_0,$$

wobei  $i_0$  aus dem Potentialverlauf nach der Gleichung (53) berechnet wird. Für das Potentialminimum  $U_m$  bei  $x/b = 0,4$  erhalten wir als notwendigen Speisestrom

$$i_0 = 180 \mu A.$$

Diesen Speisestrom muss man nach Gleichung (54) korrigieren, indem die zurückkehrenden Elektronen berücksichtigt werden. Der Betrag dieser Korrektur folgt aus der vorletzten Zeile der Tabelle, indem man den betreffenden Faktor verdoppelt. Hierdurch ergeben sich die Speiseströme, die in der Tabelle in der

letzten Zeile angegeben worden sind. Der nächste Schritt ergibt nun

$$j_a = 0,409 j_s,$$

was mit dem vorgegebenen Wert schon gut übereinstimmt. Auf diese Weise wurde der Potentialverlauf  $U_M$  erhalten. Die Lage sowie die Spannung des Minimums kann man somit sehr gut am Modell bestimmen. Die aus der Modellmessung erhaltenen Werte  $U_M$  und die berechneten Werte  $U_r$  des Potentialverlaufs sind in der folgenden Tabelle zum Vergleich angegeben worden.

$x/h$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
$U_r$	— 2,655	— 3,975	— 4,545	— 4,49	— 3,9775	— 3,09	— 1,895	— 0,43	+ 1,27
$U_M$	— 2,32	— 3,72	— 4,42	— 4,47	— 4,01	— 3,13	— 1,93	— 0,45	+ 1,28
$\Delta\%$	— 12,5	— 6,4	— 2,75	— 0,445	+ 0,8	+ 1,3	+ 2	+ 4	+ 1

In der letzten Zeile ist noch der prozentuale Fehler

$$\Delta\% = \frac{U_r - U_M}{U_r} 100\%$$

angegeben worden. Die Abweichung der aus der Modellmessung bestimmten Werte von den berechneten Werten ist grösser als in den bisher beschriebenen Fällen. Die grösste Abweichung tritt für die Punkte vor der Kathode auf. Das ist auch physikalisch leicht verständlich, da wir die Raumladung zwischen der Kathode und dem ersten Messpunkt im Modell nicht berücksichtigt haben. Da nach Messungen von A. HUTSON [14] die Geschwindigkeitsverteilung nur annähert der Maxwell'schen entspricht, darf die erreichte Genauigkeit für praktische Zwecke als befriedigend bezeichnet werden.

4. Kreiszylinderdiode

Eine Kreiszylinderdiode ist eine kreissymmetrische Anordnung, das Feld hängt nur von einer Koordinate ab. In der Widerstandskette werden nicht alle Widerstände den gleichen Wert haben, sondern die Werte sind der Reihe nach durch die Gleichung (21) gegeben. Damit der Strom durch die Kette klein gehalten wird, wurde der erste Widerstand  $R_1 = R_0$  zu 9 kΩ gewählt. Alle Widerstände wurden auf ihren Nominalwert mit der Genauigkeit  $\pm 0,3\%$  eingestellt. Die notwendigen Speiseströme für die Nachbildung der Raumladung folgen dann aus der Gleichung (24).

4.1. Austrittsgeschwindigkeit der Elektronen aus der Kathode gleich Null

Das statische Feld in einer Zylinderdiode ohne Raumladung kann man leicht durch Integration der Laplaceschen Gleichung bestimmen. Als Lösung



der Gleichung (1) für  $\nu = 1$  und die rechte Seite gleich Null für die vorgegebenen Randbedingungen  $U = 0$  an der Kathode ( $r = r_k$ ) und  $U = U_a$  an der Anode ( $r = r_a$ ) erhalten wir:

$$U = \frac{U_a}{\ln r_a/r_k} - \ln \frac{r}{r_k}. \quad (55)$$

Als praktisches Beispiel nehmen wir eine Zylinderdiode mit  $r_k = 0,4$  mm und  $r_a = 2,4$  mm sowie mit der Anodenspannung  $U_a = 10$  V. Das Verhältnis  $r_a/r_k$  ist somit gleich 6. Am Modell war  $r_k$  gleich 2 Maschenweiten ( $2E$ ) und  $r_a$  gleich  $12E$ . Da die Maschenweite am Modell zu  $E = 2$  cm gewählt wurde, ist die Vergrößerung  $n = 100$ . Die berechneten Werte  $U_r$  des statischen Potentialverlaufes ohne Raumladung nach Gleichung (55) sowie die am Modell gemessenen Werte  $U$  sind in der nachfolgenden Tabelle zusammengestellt worden:

$r/r_k$	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5
$U_r$	2,265	3,87	5,115	6,13	7,0	7,73	8,40	8,98	9,52
$U$	2,28	3,85	5,10	6,13	7,0	7,75	8,40	9,0	9,52

Die Übereinstimmung ist gut (prozentualer Fehler kleiner als 1%). Das ist für die Bestimmung des Raumladungsfeldes sehr wichtig, da man von dem statischen Potentialverlauf ausgeht, wie das im Abschnitt 3 erörtert wurde.

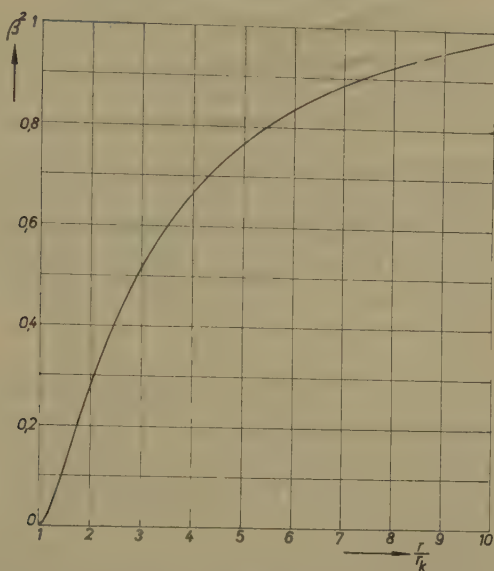
Eine *exakte* Lösung der Gleichung (1) unter Berücksichtigung der Raumladung für den Fall der Zylinderdiode [ $\nu = 1$  in Gleichung (1)] und für die vorgegebenen Randbedingungen  $U = 0$  bei  $r = r_k$  und  $U = U_a$  bei  $r = r_a$  ist nicht bekannt. Eine Näherungslösung wurde von I. LANGMUIR und K. B. BLODGET [8] angegeben. Den Potentialverlauf erhalten wir unter Berücksichtigung der Raumladung aus

$$U = \left( \frac{r \beta^2}{r_a \beta_a^2} \right)^{2/3} U_a, \quad (56)$$

wobei der Korrekturfaktor  $\beta^2$  eine Funktion  $r/r_k$  ist mit dem Anfangswert  $\beta^2 = 0$  bei  $r = r_k$  (Erfüllung der vorgegebenen Randbedingung).  $\beta_a^2$  ist der Wert des Korrekturfaktors  $\beta^2$  für  $r = r_a$ . Die für die Berechnung wichtigen Werte des Korrekturfaktors  $\beta^2$  sind in Figur 11 dargestellt worden. Daraus entnehmen wir  $\beta_a^2 = 0,836$ . Die Grösse  $\beta^2$  nimmt somit in unserem Beispiel Werte zwischen 0 und 0,836 an. Bei den Modellmessungen wird die Raumladung durch die Einspeiseströme nachgebildet. Die Gleichung (24) für die Bestimmung der Nachbildungsströme kann man in der Form

$$i_0 = c_1 \frac{j_k}{\sqrt{U}} \quad (57)$$

schreiben, wobei  $c_1$  eine Kettenkonstante ist, die für die gebauten Widerstandsketten den Wert  $c_1 = 3,39 \cdot 10^2$  ( $V^{1/2} \text{ cm}^2$ ) hat. Bei Berücksichtigung der Ver-



Figur 11

Für die Berechnung des Potentialverlaufs in einer Kreiszylinderdiode gilt der Korrekturfaktor  $\beta^2$  als Funktion des Verhältnisses  $r/r_k$ .

grösserung  $n$  im Modell kann man die Raumladungsdichte bzw. die Stromdichte  $j_k$  durch  $n^2$  dividieren oder aber die Stromdichte  $j_k$  direkt für die Modellabmessungen berechnen. Die Stromdichte  $j_k$  erhalten wir aus der Gleichung

$$j_k = 2,34 \cdot 10^{-6} \frac{U_a^{3/2}}{\beta_a^2 r_a r_k}. \quad (58)$$

Für die Stromdichte  $j_k$  in der wirklichen Zylinderdiode bei  $U_a = 10$  V erhalten wir  $j_k = 9,225 \text{ mA/cm}^2$  oder für die Modellstromdichte

$$j_{k \text{ Mod}} = 0,9225 \mu\text{A/cm}^2.$$

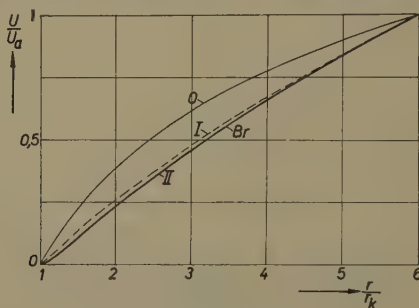
Für die Bestimmung der Speiseströme als Nachbildung der Raumladung erhalten wir aus der Gleichung (57)

$$i_0 = \frac{313}{\sqrt{U}} \mu\text{A}. \quad (59)$$

Nun wurde am Modell das gleiche Verfahren der schrittweisen Näherungen angewandt wie bei einer ebenen Diode (Abschnitt 3). Die berechneten Potentialwerte  $U_r$  nach Gleichung (56) sowie die am Modell gemessenen Werte  $U$  sind in folgender Tabelle zusammengestellt worden:

$r/r_k$	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5
$U_r$ [V]	1,085	2,31	3,48	4,57	5,59	6,56	7,48	8,37	9,20
$U$ [V]	1,090	2,32	3,48	4,58	5,60	6,55	7,50	8,35	9,20

Aus den angegebenen Werten  $U_r$  und  $U$  sieht man deutlich, dass die Abweichung der gemessenen Werte  $U$  von den berechneten Werten  $U_r$  sehr klein ist. Der prozentuale Fehler, bezogen auf den genauen Wert im entsprechenden Punkt, ist kleiner als 1%. Obwohl die Messungen mit geeichten Universalinstrumenten durchgeführt wurden, liegt die Ablesegenauigkeit in den erreich-



Figur 12

Potentialverlauf bei schrittweisen Messungen am Modell einer Kreiszylinderdiode  $r_a/r_k = 6$  mit einer Austrittsgeschwindigkeit der Elektronen aus der Kathode gleich Null. Kurve  $O$ : statisches Feld ohne Raumladung;  $I$ : erster Schritt mit Nachbildung der Raumladung;  $II$ : zweiter Schritt;  $Br$ : berechneter Potentialverlauf nach Gleichung (56).

ten Fehlergrenzen. Die berechneten bzw. die gemessenen Werte der Potentialverteilung im statischen Feld ( $O$ ) ohne Raumladung sowie die schrittweisen Näherungen bei der Nachbildung der Raumladung sind aus der Figur 12 ersichtlich. Nur zwei Schritte waren notwendig, ähnlich wie bei dem ebenen Fall. Die zweite Näherung  $II$  stimmt schon gut mit dem berechneten Verlauf überein.

#### 4.2. Konstante Austrittsgeschwindigkeit der Elektronen aus der Kathode

Die Poissonsche Gleichung (1) ist für den Fall der Zylinderdiode ( $\nu = 1$ ) mit konstanter Austrittsgeschwindigkeit der Elektronen aus der Kathode  $U_k = \text{const}$  analytisch nicht lösbar. Eine Näherungsmethode, die sehr zeitraubend ist, wurde von L. PAGE und N. J. ADAMS [13] angegeben. Der Rechenaufwand ist so gross, dass sie praktisch kaum anwendbar ist. Einfacher ist der Fall, in welchem eine virtuelle Kathode mit der Spannung  $U = 0$  auftritt. Die entsprechende Lösung wurde zuerst von A. VAN DER ZIEL [12] angegeben. Um so grösser ist hier die Bedeutung des einfachen Messverfahrens an der Widerstandskette, das in schrittweisen Näherungen leicht durchführbar ist.



Wir nehmen wieder die Zylinderdiode mit den geometrischen Abmessungen  $r_k = 0,4$  mm und  $r_a = 2,4$  mm an, wie bei dem Fall der Austrittsgeschwindigkeit der Elektronen aus der Kathode gleich Null. Die Anodenspannung wählen wir gleich 10 V und die Kathodenspannung, die der konstanten Austrittsgeschwindigkeit der Elektronen aus der Kathode entspricht, gleich  $U_k = 2$  V. Wenn wir die Stromdichte an der Kathode nach Gleichung (58) mit  $j_{k0}$  bezeichnen, so wird die vorhandene Stromdichte  $j_k$  unter Berücksichtigung der konstanten Austrittsgeschwindigkeit grösser, wie auch im ebenen Fall (vgl. Abschnitt 3.2.). Wir können dann schreiben:

$$j_k = \kappa j_{k0}, \tag{60}$$

wobei  $\kappa$  ein Faktor grösser als 1 ist. Nun kann  $\kappa$  nicht beliebige Werte annehmen, denn physikalisch ist der Faktor begrenzt, ähnlich wie bei der ebenen Diode. Schon bei  $\kappa = 2,5$  wurde der Fall einer virtuellen Kathode mit der Spannung Null festgestellt, wobei man die Stromteilung bzw. auch die rückkehrenden Elektronen berücksichtigen muss. Bei  $\kappa = 2$  tritt aber ein Potentialminimum  $U_m = 1,73$  V bei  $r/r_k = 1,5$  auf, wie die nachfolgenden Messungen zeigen werden. Mit Berücksichtigung der Gleichungen (59) und (60) mit  $\kappa = 2$  werden die notwendigen Einspeiseströme für die Nachbildung der Raumladung durch

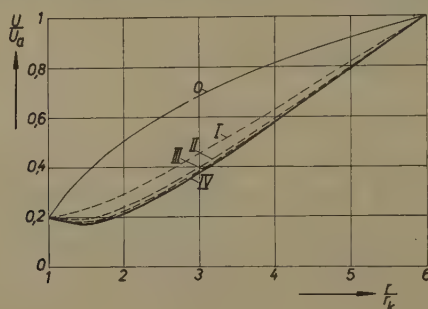
$$i_0 = \frac{626}{\sqrt{U}} \mu A \tag{61}$$

gegeben. Mit den eingestellten Randbedingungen am Modell ( $U_a - U_k = 8$  V) wurde zuerst das statische Feld ohne Raumladung gemessen. Die gemessenen Werte wurden mit den nach Gleichung (55) berechneten Werten verglichen. Die Abweichungen sind kleiner als 1%, was wir als befriedigend annehmen können. Ausgehend von dem statischen Feld ohne Raumladung wurden die notwendigen Einspeiseströme als Nachbildung der Raumladung nach Gleichung (61) bestimmt und die Einspeiseströme im Modell eingestellt. Es waren vier Schritte notwendig. Nach dem vierten Schritt war die Änderung im Potentialverlauf so klein, dass praktisch keine Korrektur der Einspeiseströme mehr möglich war. Die gemessenen Werte  $U$  des Potentialverlaufs nach dem letzten, vierten Schritt sind in der nachfolgenden Tabelle zusammengestellt worden:

$r/r_k$	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5
$U$	1,73	2,12	2,85	3,76	4,75	5,80	6,83	7,95	8,95

Die Ergebnisse der schrittweisen Näherungen bei der Bestimmung des Potentialverlaufs sind in der Figur 13 gezeichnet worden. Mit (O) wurde der statische Potentialverlauf ohne Raumladung bezeichnet und mit I bis IV der Potential-

verläuft nach schrittweisen Näherungen. Aus dem gezeichneten Verlauf kann man leicht die Stelle sowie auch den Spannungsbetrag im Potentialminimum ermitteln. Da die theoretische Berechnung kaum ausführbar ist, bilden die einfach durchführbaren Modellmessungen bis jetzt die einzige praktische Methode zur Lösung dieses Problems mit einer konstanten vorgegebenen Austrittsgeschwindigkeit der Elektronen aus der Kathode bei Kreiszylinderdioden



Figur 13

Potentialverlauf bei schrittweisen Näherungen in einer Kreiszylinderdiode  $r_a/r_k = 6$  mit konstanter Austrittsgeschwindigkeit der Elektronen aus der Kathode  $U_k = 0,2 U_a$ . Kurve 0: statisches Feld ohne Raumladung; I: erste Näherung... usw. IV: letzte (vierte) Näherung bei Nachbildung der Raumladung.

## 5. Kugelsymmetrisches Elektrodensystem

Praktisch haben die kugelsymmetrischen Elektrodensysteme eine viel kleinere Bedeutung als die kreissymmetrischen (Zylinderdiode). Da sie doch auftreten können und auch die theoretische Näherungslösung nach I. LANGMUIR und K. B. BLODGET [9] bekannt ist, werden wir kurz ein solches Elektrodensystem behandeln. Die Messungen sind einfach und schnell ausführbar. Allgemein könnte man mit dem beschriebenen Messverfahren analoge Probleme für den  $n$ -dimensionalen Raum lösen. Da sie aber praktisch keine Bedeutung haben, beschränken wir uns auf den kugelsymmetrischen Fall  $\nu = 2$  in Gleichung (1).

Als Beispiel nehmen wir ein Elektrodensystem an mit  $r_k = 0,2$  mm und  $r_a = 1,6$  mm. Die Anodenspannung gegen die Kathode ( $U_k = 0$  V) beträgt  $U_a = 10$  V. Nach den Ausführungen im Abschnitt 2 hat der erste Widerstand in der Kette den Wert  $R_1 = \infty$ . Da wir am Modell erst den nächsten Punkt vom Kugelzentrum aus als den Kathodenpunkt wählen, stört das die Messungen nicht. Damit der Strom in der Kette klein bleibt, wurde der Widerstand  $R_3 = R_0 = 9$  k $\Omega$  gewählt. Die weiteren Widerstandswerte in der Kette folgen aus der Gleichung (28). Alle Widerstände wurden mit der Genauigkeit (Toleranz)  $\pm 0,3\%$  auf den nach Gleichung (28) bestimmten Wert eingestellt.

Hierdurch wird die erzielte Genauigkeit bei den Messungen des Potentialverlaufs befriedigend. Die für die Nachbildung der Raumladung notwendigen Einspeiseströme werden nach Gleichung (31) ermittelt. Im Modell wurde an der Widerstandskette  $r_k$  mit einer Maschenweite nachgebildet. Da das Verhältnis  $r_a/r_k = 8$  ist, waren für die Nachbildung der Anodenhalbmesser  $r_a$  acht Maschenweiten (8 E) notwendig.

Die Lösung der Laplaceschen Gleichung [rechte Seite der Gleichung (1) gleich Null] für den kugelsymmetrischen Fall  $\nu = 2$  ergibt

$$U = U_a \frac{r_a r_k}{r_a - r_k} \left[ \frac{1}{r_k} - \frac{1}{r} \right]. \tag{62}$$

Dabei wurden die Randbedingungen  $U_k = 0$  bei  $r = r_k$  und  $U = U_a$  bei  $r = r_a$  berücksichtigt. Die nach Gleichung (62) berechneten Potentialwerte  $U_r$  und die am Modell gemessenen Werte  $U$  sind zum Vergleich in folgender Tabelle zusammengestellt worden:

$r/r_k$	2	3	4	5	6	7
$U_r$	5,715	7,62	8,575	9,15	9,52	9,80
$U$	5,7	7,60	8,55	9,15	9,50	9,80

Ein Vergleich der berechneten Werte  $U_r$  und der gemessenen Werte  $U$  des statischen Potentialverlaufs ohne Raumladung zeigt, dass die Übereinstimmung gut ist. Der auftretende relative Fehler ist kleiner als 0,3%.

Die Gleichung (31) für die Einspeiseströme als Nachbildung der Raumladung kann man analog zur Gleichung (57) in der Form schreiben

$$i_0 = c_2 \frac{j_k}{\sqrt{U}}, \tag{63}$$

wobei die Kettenkonstante  $c_2$  in unserem Fall den Wert  $c_2 = 42,35 \text{ (V}^{1/2} \text{ cm}^2)$  hat. Die Stromdichte  $j_k$  wird jetzt

$$j_k = 2,34 \cdot 10^{-6} \frac{U_a^{3/2}}{\alpha_a^2 r_k^2}, \tag{64}$$

wobei  $\alpha_a^2$  der Wert des Korrekturfaktors  $\alpha^2$  [vgl. Gleichung (66)] bei  $r = r_a$  ist. Bei der Bestimmung der Einspeiseströme nach Gleichung (63) kann man die Vergrößerung  $n = 100$  im Modell berücksichtigen oder die Kathodenstromdichte direkt für die Modellabmessungen bestimmen. Für die Stromdichte  $j_{kM}$  am Modell erhalten wir

$$j_{kM} = 11,75 \text{ }\mu\text{A/cm}^2$$

und nach Gleichung (63) für die Einspeiseströme

$$i_0 \approx \frac{500}{\sqrt{U}} \text{ }\mu\text{A}. \tag{65}$$



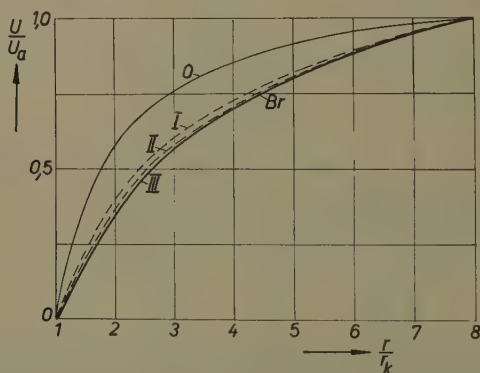
Betrachten wir nur den Fall der Austrittsgeschwindigkeit der Elektronen aus der Kathode gleich Null. Die Lösung der Poissonschen Gleichung (1) für den kugelsymmetrischen Fall  $\nu = 2$  in Gleichung (1) nach I. LANGMUIR und K. C. BLODGETT [9] wird

$$U = \left( \frac{\alpha^2}{\alpha_a^2} \right)^{2/3} U_a. \quad (66)$$

Der Korrekturfaktor  $\alpha^2$  ist eine Funktion von  $r/r_k$ , ähnlich wie bei der Zylinderdiode  $\beta^2$ . Er erfüllt die Randbedingungen an der Kathode und an der Anode. Mit  $\alpha_a^2$  ist der Wert des Korrekturfaktors  $\alpha^2$  bei  $r = r_a$  bezeichnet worden. Die nach Gleichung (66) berechneten Werte  $U_r$  des Potentialverlaufs mit Berücksichtigung der Raumladung sowie die am Modell nach dem letzten Schritt mit schrittweisen Näherungen gemessenen Werte  $U$  sind in nachfolgender Tabelle angegeben worden:

$r/r_k$	2	3	4	5	6	7
$U_r$ [V]	3,57	5,67	7,0	8,07	8,85	9,50
$U$ [V]	3,60	5,65	7,0	8,05	8,85	9,50

Die Übereinstimmung ist befriedigend, die relative Abweichung ist kleiner als 1%. Der statische Potentialverlauf (O) ohne Raumladung sowie die schrittweisen Näherungen bei Berücksichtigung der Raumladung sind in der Figur 14



Figur 14

Potentialverlauf bei schrittweisen Messungen in einem kugelsymmetrischen Elektrodensystem  $r_a/r_k = 8$  mit einer Austrittsgeschwindigkeit der Elektronen aus der Kathode gleich Null. Kurve O: statischer Verlauf ohne Raumladung; I: erste Näherung bei Nachbildung der Raumladung ... usw. III: letzter, dritter Schritt, der mit dem berechneten Verlauf  $Br$  gut übereinstimmt.

veranschaulicht worden. Hier ist der Einfluss der Raumladung stark. Es waren drei Schritte notwendig. Erst nach dem dritten Schritt war die Änderung im Potentialverlauf vernachlässigbar klein. Die dritte Näherung III stimmt gut

mit dem berechneten Verlauf  $Br$  überein. Ganz analog wie im Beispiel der Zylinderdiode könnte man auch hier den Fall der konstanten Austrittsgeschwindigkeit der Elektronen aus der Kathode behandeln. Da er aber praktisch nicht wichtig ist und auch bei der Anwendung der Modellmessungen mit Widerstandsketten nichts Neues ergibt, werden wir diesen Fall hier nicht weiter betrachten.

### LITERATURVERZEICHNIS

- [1] M. J. O. STRUTT, *Moderne Mehrgitterelektronenröhren* (Springer, Berlin 1940).
- [2] M. J. O. STRUTT, *Elektronenröhren* (Springer, Berlin 1957).
- [3] H. ROTHE und W. KLEEN, *Hochvakuum-Elektronenröhren*, Bd. 1: *Physikalische Grundlagen* (Akademische Verlagsgesellschaft m. b. H., Frankfurt am Main 1955).
- [4] G. ČREMOŠNIK, *Ermittlung von Raumladungsfeldern und Kapazitäten mit Hilfe eines Widerstandsnetzes mit Stromquellen*, Dissertation ETH, Prom. Nr. 2667 (Juris Verlag 1957).
- [5] G. ČREMOŠNIK und M. J. O. STRUTT, *Praktische Anwendung eines Widerstandsnetzes zur Bestimmung eines ebenen Potential- oder Raumladungsfeldes*, Arch. Elektrotechn. 43, 177–186 (1957).
- [6] G. ČREMOŠNIK und M. J. O. STRUTT, *Bestimmung des Raumladungsfeldes, der Raumladungskapazitäten und der Kennlinie einer ebenen Triode mit Hilfe eines Widerstandsnetzmodells mit Stromquellen*, Arch. el. Übertrag. 11, 63–75 (1957).
- [7] I. LANGMUIR, *The Effect of Initial Velocities on the Potential Distribution and Thermionic Current Between Parallel Plane Electrodes*, Phys. Rev. 21, 419–435 (1923).
- [8] I. LANGMUIR und K. B. BLODGETT, *Currents Limited by Space Charge Between Coaxial Cylinders*, Phys. Rev. 22, 347–356 (1923).
- [9] I. LANGMUIR und K. B. BLODGETT, *Currents Limited by Space Charge Between Concentric Spheres*, Phys. Rev. 24, 49–59 (1924).
- [10] P. H. J. A. KLEYNEN, *Extension of Langmuir's ( $\xi/\eta$ ) Tables for a Plane Diode with Maxwellian Velocity Distribution of the Electrons*, Philips Res. Rep. 1, 81–96 (1946).
- [11] A. VAN DER ZIEL, *Extension and Application of Langmuir's Calculations on a Plane Diode with Maxwellian Velocity Distribution of the Electrons*, Philips Res. Rep. 1, 97–118 (1946).
- [12] A. VAN DER ZIEL, *The Virtual Cathode Problem for Cylindrical Electrodes*, Appl. Sci. Res. Vol. [B] 1, 105–118 (1948).
- [13] L. PAGE und N. J. ADAMS, *Diode Space Charge for Any Initial Velocity and Current*, Phys. Rev. 76, 381–388 (1949).
- [14] A. HUTSON, *Velocity Analysis of Thermionic Emission from Single-Crystal Tungsten*, Phys. Rev. 98, 889–901 (1955).
- [15] G. ČREMOŠNIK, A. FREI und M. J. O. STRUTT, *Neue Anwendungen von Impedanznetzwerken als Analogierechengeräte*, Scientia Electrica 3, Heft 2, 37.

### Summary

Resistance chains, used as analogy computers, allow the determination of static potentials without and with space charge of high vacuum diodes, the fields of which may be considered as onedimensional. In the case with space charge,

additional currents, fed into the resistance chain, are essential for the representation of the space charge. Such resistance chains with additional current sources afford solutions of Poisson's equation

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \nu^2} + \frac{\nu}{\gamma} \cdot \frac{\partial V}{\partial \nu} = -\frac{\rho}{\varepsilon}.$$

The first problem under consideration is the plane diode, for which  $\nu = 0$ . Here the solution of Poisson's equation is obtained by iteration:

- (a) with zero emission velocity at the cathode;
- (b) with finite emission velocity;
- (c) with Maxwellian emission velocity distribution at the cathode.

The solutions take much less time using the resistance chain than using the well-known formulas for these problems. The second problem concerns the circular cylindrical diode ( $\nu = 1$ ) with zero and with finite emission velocity at the cathode. In the latter case, no straight-forward mathematical solution is known. Again, practical solutions are easily obtained by iteration using the resistance chain. Finally, a spherical diode ( $\nu = 2$ ) is considered at zero emission velocity. Here also, the chain affords easy solutions. The computed chain solutions were compared with known formulas in several cases, showing discrepancies not over 1% in most cases.

(Eingegangen: 19. Februar 1957.)

## Plastic Yielding of Notched Strips Under Conditions of Plane Stress

By HUGH FORD and GEORGE LIANIS, London<sup>1)</sup>

### Introduction

The problem of thin notched strips subjected to tension has been studied by HILL [2]<sup>2)</sup> for the case where the notches are symmetrically placed on each side of the strip. The deformation corresponds to plane stress and, using the theory of characteristics, HILL finds the upper bound solutions for the two cases of *V*-notched and circularly notched strips. BISHOP [1] has shown that HILL's upper bound is the true solution for the *V*-notched case, but gives no proof for the circularly notched case.

In this paper, a possible statically admissible stress field (lower bound) is found for these two cases, but the main purpose is to examine single notched strips subjected to bending in the plane of the sheet. Upper bounds are found for single *V*- and circularly notched strips in bending and the general lower bound solution is applied to these two cases.

<sup>1)</sup> Imperial College of Science and Technology (University of London), Department of Mechanical Engineering.

<sup>2)</sup> Numbers in brackets refer to References, page 382.



## Statically Admissible Stress Field for Plane Stress – Simple Tension

The symmetrical field shown in Figure 1 is a statically admissible field if it satisfies the following conditions:

(1) The boundary stress conditions. This is satisfied for the directions of the stresses shown in the figure.

(2) The equilibrium equations. Only discontinuities of the direct stresses normal to the surfaces  $AB$ ,  $CD$ ,  $AO$ ,  $BO$ ,  $CO$ , and  $DO$ , are allowed. Since these conditions are satisfied automatically across  $AB$  and  $CD$ , only the discontinui-

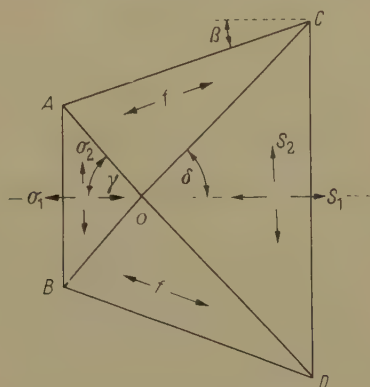


Figure 1  
Stress trapezoid.

ties  $AO$  and  $CO$  need to be examined. These provide four equations of equilibrium.

(3) The yield criterion must nowhere be violated. This condition provides three inequalities for the regions  $AOB$ ,  $COD$ , and  $AOC$ .

The above four equations and three inequalities are sufficient to evaluate the seven unknowns  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $f$ ,  $s_1$ ,  $s_2$ ,  $\gamma$ , and  $\delta$ , in terms of the angle  $\beta$ . In addition, the condition that the load acting on  $AB$  must be a maximum provides another equation to evaluate  $\beta$ .

### From condition 2

From the continuity of the normal ( $\sigma$ ) and shear ( $\tau$ ) stress across  $AO$  it follows:

$$\sigma = \sigma_1 \sin^2 \gamma + \sigma_2 \cos^2 \gamma = f \sin^2 (\beta + \gamma), \quad (1)$$

$$\tau = (\sigma_1 - \sigma_2) \sin \gamma \cos \gamma = f \sin (\beta + \gamma) \cos (\beta + \gamma). \quad (2)$$

Therefore

$$\sigma_1 = f \frac{\sin(\beta + \gamma) \cos \beta}{\sin \gamma}, \quad (3)$$

$$\sigma_2 = f \frac{\sin(\beta + \gamma) \sin \beta}{\cos \gamma}. \quad (4)$$

Also from the continuity across  $CO$  it follows:

$$\sigma' = s_1 \sin^2 \delta + s_2 \cos^2 \delta = f \sin^2(\delta - \beta), \quad (5)$$

$$\tau' = (s_1 - s_2) \sin \delta \cos \delta = f \sin(\delta - \beta) \cos(\delta - \beta). \quad (6)$$

Therefore

$$s_1 = f \frac{\sin(\delta - \beta) \cos \beta}{\sin \delta}, \quad (7)$$

$$s_2 = f \frac{\sin(\delta - \beta) \sin \beta}{\cos \delta}. \quad (8)$$

*From condition 3*

The von-Mises yield criterion for plane stress in terms of the principal stresses is:

$$\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y \leq Y^2,$$

where  $Y$  is the yield stress in simple tension. Therefore:

For the region  $AOB$ :

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2 \leq Y^2. \quad (9)$$

For the region  $AOC$ :

$$f \leq Y. \quad (10)$$

For the region  $COD$ :

$$s_1^2 + s_2^2 - s_1 s_2 \leq Y^2, \quad s_1 \leq Y. \quad (11)$$

From the equations (3), (4), (7), and (8) and the inequalities (9), (10), and (11), the seven unknowns can be evaluated.

Substituting  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ , from equations (3) and (4) into (9) and  $s_1$ ,  $s_2$ , from equations (7), (8), into (11) it follows:

$$\sin^2(\beta + \gamma) \left[ \frac{\cos^2 \beta}{\sin^2 \gamma} + \frac{\sin^2 \beta}{\cos^2 \gamma} - \frac{\sin^2 \beta}{\sin^2 \gamma} \right] \leq \frac{Y^2}{f^2}, \quad (12)$$

$$\sin^2(\delta - \beta) \left[ \frac{\cos^2 \beta}{\sin^2 \delta} + \frac{\sin^2 \beta}{\cos^2 \delta} - \frac{\sin^2 \beta}{\sin^2 \delta} \right] \leq \frac{Y^2}{f^2}. \quad (13)$$

From (12) and (13)  $\gamma$  and  $\delta$  can be found in terms of  $Y/f$ .

The load acting across  $AB$  is a maximum if  $\sigma_1$  is a maximum. If the region  $AOB$  is fully plastic from VON MISES' ellipse (Figure 2) it follows that maximum

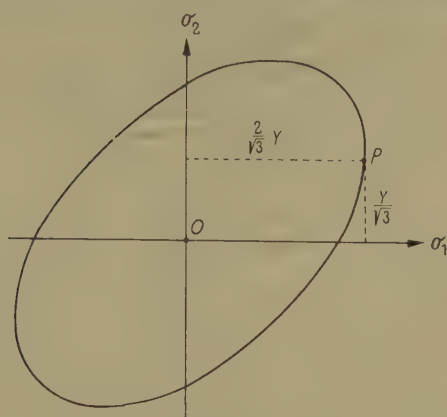


Figure 2

Yield locus for plane stress.

$\sigma_1$  corresponds to the point  $P$ :

$$\sigma_1 = \frac{2}{\sqrt{3}} Y, \quad \sigma_2 = \frac{Y}{\sqrt{3}}. \quad (14)$$

From (3), (4) and (14), it follows

$$\cot \beta \cot \gamma = 2, \quad (15)$$

$$\frac{\sin(\beta + \gamma) \cos \beta}{\sin \gamma} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{Y}{f}, \quad (16)$$

or

$$\cos^2 \beta = 2 \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{Y}{f} \right). \quad (17)$$

From (10) and (17) it follows

$$\cos^2 \beta \leq 2 \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \quad \text{or} \quad \beta \geq 23^\circ.$$

For  $\beta = 23^\circ$ ,  $f = Y$  and the region  $AOC$  is fully plastic.

For  $\beta = 23^\circ$  inequality (13) is satisfied for  $\delta \leq 61^\circ 15'$ . For  $\delta = 61^\circ 15'$ , we find  $s_1 = 0.650 Y$ ,  $s_2 = -0.505 Y$ . The four regions of the trapezoid are in a fully plastic state if

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{2}{\sqrt{3}} Y, \quad \sigma_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} Y, \quad (\text{point } P \text{ in Figure 2}) \\ s_1 &= 0.650 Y, \quad s_2 = -0.505 Y, \\ \beta &= 23^\circ, \quad \gamma = 49^\circ 40', \quad \delta = 61^\circ 15'. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

### V-Notched Strips Loaded in Tension

For  $\alpha \leq \pi/2 - \beta \leq 67^\circ$  the fully plastic trapezoid created from equation (18) can be inscribed into the strip without cutting the boundaries (Figure 3).

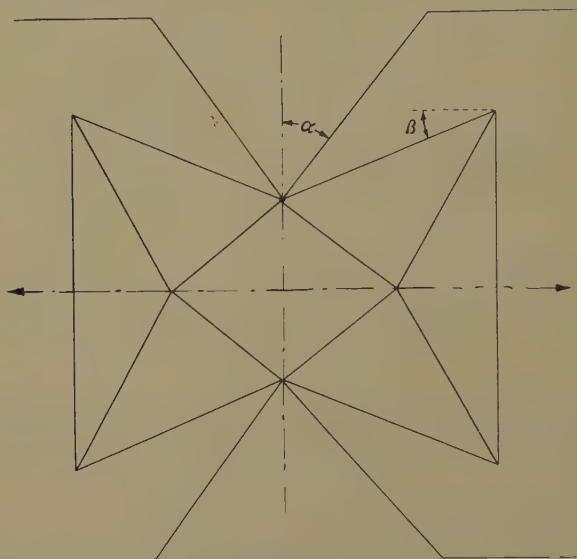


Figure 3  
V-notched strip in tension.

In this case the constraint factor is constant.  $L_1 = 2/\sqrt{3} = 1.155$  for  $0 \leq \alpha \leq 67^\circ$ . This is a lower bound for  $\bar{L}$ . HILL's upper bound for the constraint factor is

$$\left. \begin{aligned} L_u &= \frac{2}{\sqrt{3}} = 1.155 \quad \text{for } 0 \leq \alpha \leq 70^\circ 32', \\ L_u &= \frac{\sqrt{(1 + 3 \sin^2 \varphi) + 3 \cos \varphi}}{2\sqrt{3}} \quad \text{for } 70^\circ 32' \leq \alpha \leq 90^\circ, \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

where  $\varphi$  is found from the equation  $2 \tan \varphi + \tan 2(\alpha + 2\beta' - \varphi) = 0$  and  $\beta' = 54^\circ 44'$ . Therefore the upper and lower bound coincide for  $0 \leq \alpha \leq 67^\circ$  which gives the collapse load of the V-notched strip.

For  $\alpha \geq 67^\circ$  it is taken  $\beta = \pi/2 - \alpha$ , in other words the sides of the notch and the trapezoid coincide. In this case:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{\cos(\gamma - \alpha) \sin \alpha}{\sin \gamma} Y, & (a) \quad \sigma_2 &= \frac{\cos(\gamma - \alpha) \cos \alpha}{\sin \gamma} Y, & (b) \\ s_1 &= -\frac{\cos(\delta + \alpha) \sin \alpha}{\sin \delta} Y, & (c) \quad s_2 &= \frac{\cos(\delta + \alpha) \cos \alpha}{\cos \delta} Y. & (d) \end{aligned} \right\} \quad (20)$$



For the constraint factor to be maximum it follows from equation (20a) that  $\gamma$  must be the minimum possible and it is defined from inequality (13). The latter for  $\beta = \pi/2 - \alpha$  and  $f = Y$  becomes

$$\cos^2(\gamma - \alpha) \left[ \frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \gamma} + \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \gamma} - \frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \gamma} \right] \leq 1. \quad (21)$$

The following table gives the optimum value for  $\gamma$  and the lower bound for the constraint factor:

Table 1

$\alpha$	70°	75°	80°	85°	90°
$\gamma$	50° 30'	51° 30'	52° 30'	54°	—
$\beta$	20°	15°	10°	5°	0°
$L_1$	1.152	1.132	1.103	1.058	1.000
$\varphi$	0°	27° 30'	38° 30'	47°	—
$L_{ll}$	1.155	1.141	1.105	1.060	1.000

For the region  $67^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$  the two bounds almost coincide (Figure 4). This agrees with BISHOP's proof [1] that the upper bound is the true solution. BISHOP, however, showed this to be so for values of  $\alpha$  between  $0^\circ$  and  $90^\circ$ ; the above limit analysis gives the true value of the constraint factor of 1.155 for  $0 \leq \alpha \leq 67^\circ$ , but a value slightly below the true value from  $67 \leq \alpha \leq 90^\circ$ .

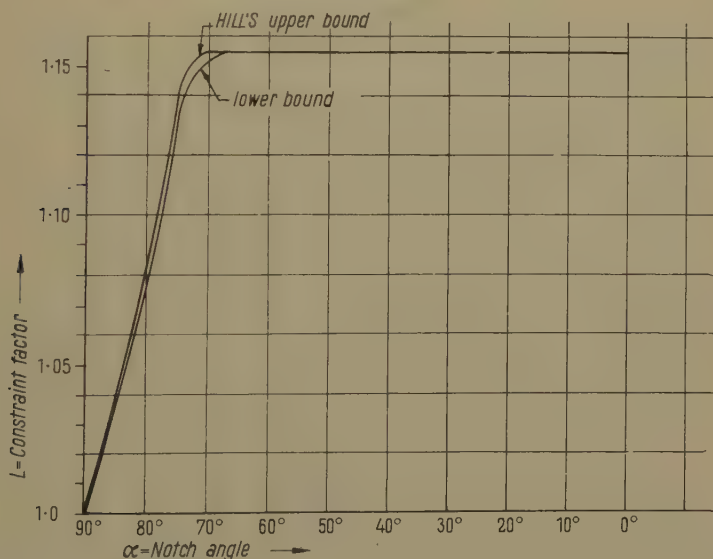


Figure 4

Double V-notched strip under tension.

### Circularly Notched Strips in Tension

For double-circular notches, radius  $\varrho$ , with the stress trapezoid drawn tangential to the notch surface (Figure 5),

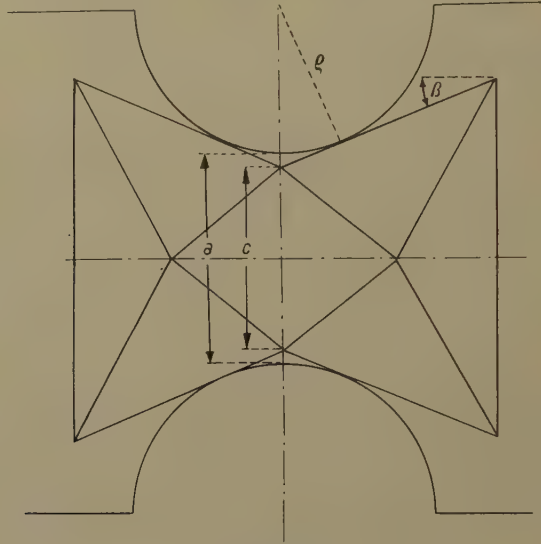


Figure 5

Circularly notched strip in tension.

$$\frac{c}{a} = 1 - \frac{2\varrho}{a} \left( \frac{1 - \cos \beta}{\cos \beta} \right). \quad (22)$$

Therefore, the lower bound for the constraint factor is given by

$$L_1 = \frac{\sigma_1}{Y} \left[ 1 - \frac{2\varrho}{a} \left( \frac{1 - \cos \beta}{\cos \beta} \right) \right]. \quad (23)$$

The angle  $\beta$  is defined so as to maximize  $L_1$ , i. e.,

$$\frac{\partial(\sigma_1/Y)}{\partial\beta} \left[ 1 - \frac{2\varrho}{a} \left( \frac{1 - \cos \beta}{\cos \beta} \right) \right] - \frac{\sigma_1}{Y} \cdot \frac{2\varrho}{a} \cdot \frac{1}{\cos^2 \beta} = 0, \quad (24)$$

where

$$\frac{\partial(\sigma_1/Y)}{\partial\beta} \quad \text{and} \quad \frac{\sigma_1}{Y}$$

are defined from equation (3) with  $f = Y$  for  $0^\circ \leq \beta \leq 23^\circ$  and from equation (18) for  $\beta \geq 23^\circ$ . Solving numerically equation (23) and (24) the values given in Table 2 are found.

The upper bound solution found by HILL [2] is given in the following approximate formulae:

$$L_u = 1 + 0.226 \frac{a}{a + 2 \varrho} \quad \text{for } 0.466 \leq \frac{\varrho}{a} \leq \infty, \quad \text{i. e., } 0 \leq \frac{a}{a + \varrho} \leq 0.664,$$
$$L_u = \frac{2}{\sqrt{3}} - 0.080 \frac{\varrho}{a} \quad \text{for } 0 \leq \frac{\varrho}{a} \leq 0.465, \quad \text{i. e., } 0.664 \leq \frac{a}{a + \varrho} \leq 1.0.$$

We can see from Table 2 and Figure 6 that the mean value differs by less than  $\pm 0.9\%$  from the bounds. BISHOP did not prove that HILL's upper bound is a true solution. The present limit analysis gives a lower limit close to the upper bound and indicates that HILL's solution is the true solution.

Table 2

$\frac{a}{a + \varrho}$	1.0	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	0.1
$L_1$	1.155	1.133	1.118	1.102	1.087	1.072	1.057	1.040	1.025	1.012
$L_u$	1.155	1.146	1.135	1.120	1.096	1.075	1.057	1.040	1.025	1.012

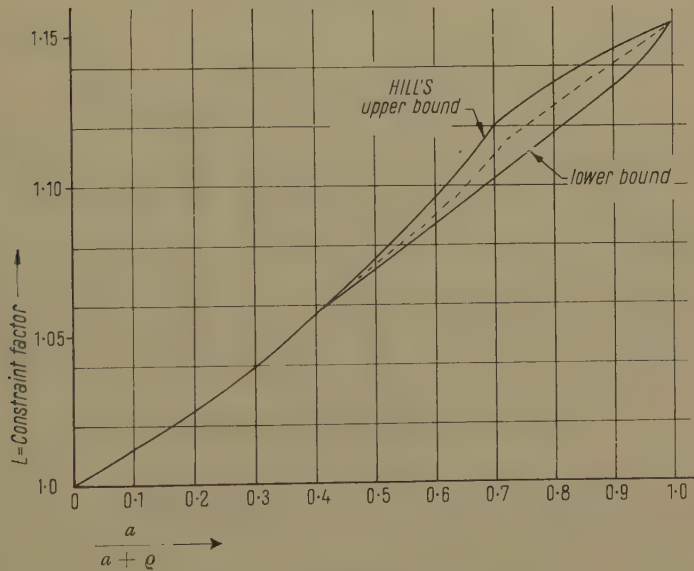


Figure 6  
Circularly notched strip under tension.

# Statically Admissible Stress Field for Single-Notched Strips Undergoing Plastic Bending Under Conditions of Plane Stress

Let a horizontal band stressed uniformly by the stress  $s$  be added between  $B$  and  $D$  (Figure 7). The state of stress in the regions I, II, and III, is shown in Figures 8a, b, and c. The von-Mises criterion:

$$\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3 \tau_{xy}^2 \leq Y^2$$

applied in the three regions gives

$$(a) \quad \begin{cases} -Y \leq s \leq +Y & \text{(from Figure 8a),} \\ \frac{s}{Y} \left( \frac{s}{Y} + 3 \cos^2 \beta - 1 \right) \leq 0 & \text{(from Figure 8b),} \\ s \leq 0 & [\text{since } s_2 \leq 0, \text{ equation (8)}] \quad \text{(from Figure 8c).} \end{cases}$$

The above inequalities are satisfied for

$$(b) \quad \begin{cases} 0 \geq s \geq -(3 \cos^2 \beta - 1), \quad \sigma_1 = \frac{2Y}{\sqrt{3}} & \text{for } 35^\circ 10' \leq \beta \leq 54^\circ 10' \\ \text{or} \\ s = -Y, \quad \sigma_1 = \frac{2Y}{\sqrt{3}} & \text{for } 23^\circ \leq \beta \leq 35^\circ 10' \\ \text{or} \\ s = -Y, \quad \sigma_1 = Y \frac{\sin(\beta + \gamma) \cos \beta}{\sin \gamma} & \text{for } 0 \leq \beta \leq 23^\circ. \end{cases}$$

(c) If we keep therefore  $\beta = 23^\circ$  and  $s = -Y$  then  $\sigma_1 = \text{const} = 2Y/\sqrt{3}$ , whilst for  $0^\circ \leq \beta \leq 23^\circ$ ,  $s = -Y$ ,  $\sigma_1$  is given by equation (3).

The dimensions of the field are found from the geometrical data of the strip and the notch, the requirement that the oblique side of the trapezoid must be tangential to the notch, and the equilibrium equation along the minimum cross section of the strip. The latter gives (Figure 7)  $d = c \sigma_1 / Y$  and therefore

$$d = \frac{2}{\sqrt{3}} c \quad \text{for } 23^\circ \leq \beta \leq 35^\circ 10', \quad (25)$$

$$d = c \frac{\sin(\beta + \gamma) \cos \beta}{\sin \gamma} \quad \text{for } 0^\circ \leq \beta \leq 23^\circ,$$

where  $\gamma$  as a function of  $\beta$  is given by (12) with the equality sign and  $f = Y$ , and  $\sigma_1$  from equation (3) or (18).



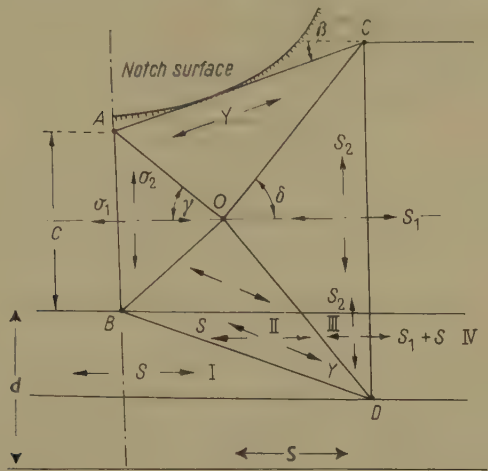


Figure 7  
Stress field for single-notched strips undergoing plastic bending

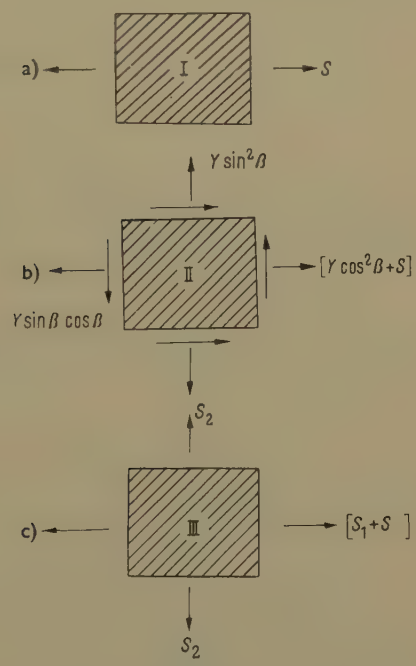


Figure 8  
Elements showing states of stress in regions I, II, and III in Figure 7.



where the polar angle  $\varphi$  is measured from the base line which is inclined at the angle  $2\beta$  to the edge  $AB$ . The one family of the characteristics are straight lines while the other family, such as  $BC$ , have polar equation:

$$r^2 \sin \varphi = \text{const.} \quad (29)$$

The field to the left of  $C$  consists of parallel straight lines and the state of stress is biaxial tension parallel to the axes. In order that there should be no shear stress along  $ON$  the angle  $\varphi_0$  is defined from the equation [HILL [2], equation (14)]

$$2 \tan \varphi_0 + \tan 2(\alpha + 2\beta - \varphi_0) = 0. \quad (30)$$

The angle  $\widehat{CNH}$  must be greater than the angle defined by a radial field along the end radii of which the states of stress are those in the stress discontinuity point  $N$  in the regions I and II. Otherwise the yield criterion is violated in some parts of the rigid material near the corner  $N$ . The analogy of HENCKY's first equation for plane stress is [HILL [3], equation (44), p. 302]:

$$\left. \begin{aligned} d(\lambda - \omega) &= 0 \text{ along } \alpha\text{-lines, (a)} \\ d(\lambda + \omega) &= 0 \text{ along } \beta\text{-lines, (b)} \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

where

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= \tan^{-1} (2 \tan \Psi) - \frac{\Psi}{2}, \quad (a) \\ \omega &= \frac{\pi}{4} + \varphi_\alpha + \frac{\Psi}{2} = \frac{\pi}{4} + \varphi_\beta - \frac{\Psi}{2}. \quad (b) \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

$\varphi_\alpha, \varphi_\beta$  are anticlockwise angles of the characteristics from a fixed direction  $x$ , and the angle  $\Psi$  is defined from the ratio of principal stresses  $\sigma_1 \sigma_2$ :

$$\Psi = \sin^{-1} \frac{1}{3} \left( \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{\sigma_1 - \sigma_2} \right). \quad (33)$$

From equations (31a) and (32b) it follows that the angle of rotation of  $NC$  to meet  $NH$  for a radial field consistent with the state of stresses in I and II is equal to

$$\lambda_I - \lambda_{II} + \frac{\Psi_I}{2} - \frac{\Psi_{II}}{2}.$$

Therefore

$$\left| \lambda_I - \lambda_{II} + \frac{\Psi_I}{2} - \frac{\Psi_{II}}{2} \right| \leq \Delta \varphi. \quad (34)$$

From Figure 12 it follows

$$\Delta \varphi = \alpha + 3\beta - \varphi_0 - \frac{\pi}{2}, \quad \Psi_I = 2(\alpha + 2\beta - \varphi_0) - 3\frac{\pi}{2}, \quad \Psi_{II} = \frac{\pi}{2} - 2\beta. \quad (35)$$

Substituting in (34) and by means of equations (30) and (32a) we find:

$$[\tan^{-1}(\cot \varphi_0) - \tan^{-1}(2 \cot 2 \beta)] \leq \alpha + 3 \beta - \varphi_0 - \frac{\pi}{2}$$

or

$$\left[ \frac{\pi}{2} - \varphi_0 - \tan^{-1}(2 \cot 2 \beta) \right] \leq \alpha + 3 \beta - \varphi_0 - \frac{\pi}{2}$$

or

$$\alpha \geq \pi - 3 \beta - \tan^{-1}(2 \cot 2 \beta).$$

But since  $\tan \beta = \sqrt{2}$ ,  $\tan^{-1}(2 \cot 2 \beta) = \pi/2 - \beta$ ,

$$\alpha \geq 3 \frac{\pi}{2} - 4 \beta \quad \text{or} \quad \alpha \geq 51^\circ. \quad (36)$$

By means of the angles  $\beta$ ,  $\varphi_0$  and equation (29) the field is fixed if  $c$  is known.  $c$  can be found from the equation of equilibrium. The stress normal to  $ON$  is [HILL [3], equation (41)]

$$\sigma_m = \frac{k(2 \sin \Psi_I + 1)}{\sqrt{1 + 3 \sin^2 \Psi_I}}$$

and because of equation (34)

$$\sigma_m = \frac{Y[3 \cos 2(\alpha + 2\beta - \varphi_0) + 1]}{\sqrt{3} \sqrt{1 + 3 \cos^2 2(\alpha + 2\beta - \varphi_0)}}. \quad (37)$$

Therefore

$$c \sigma_m = Y(a - c) \quad (38)$$

and

$$\frac{c}{a} = \frac{1}{1 + \frac{[3 \cos 2(\alpha + 2\beta - \varphi_0) + 1]}{\sqrt{3} \sqrt{1 + 3 \cos^2 2(\alpha + 2\beta - \varphi_0)}}}, \quad (39)$$

where  $\varphi_0$  is found from equation (30).

The yield moment is

$$M_Y = \frac{\sigma_m c^2}{2} + \frac{Y(a - c)^2}{2}$$

and because of (38)

$$M_Y = \frac{c^2}{2} \sigma_m \left( 1 + \frac{\sigma_m}{Y} \right).$$

Therefore the constraint factor is (Figure 12)

$$L_u = \frac{4 M_Y}{Y a^2} = \frac{\frac{2 \sigma_m}{Y}}{\left( 1 + \frac{\sigma_m}{Y} \right)}. \quad (40)$$

This solution however holds as long as  $\varphi_0 \geq 0$  or from equation (30) for  $\alpha \geq 70^\circ 32'$ .



# Solution 2

For  $\alpha = 70^\circ 32'$  the field inside  $OABCN$  (Figure 9) shrinks to a coincident pair of characteristics along the transverse axis (Figure 10) and it retains its shape for

$$0^\circ \leq \alpha \leq 70^\circ 32'.$$

$ON$  is therefore a local neck.

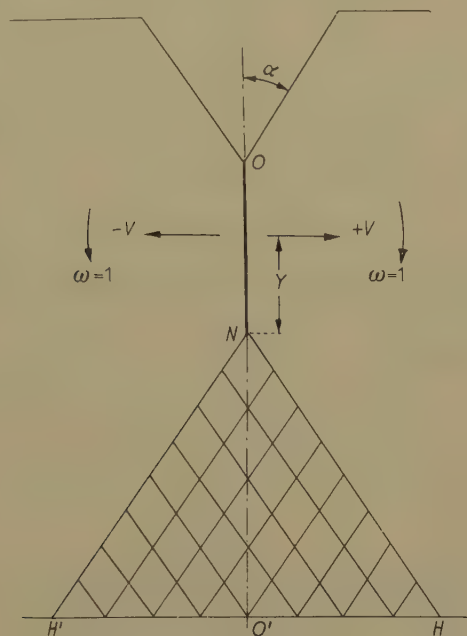


Figure 10  
Characteristics for  $V$ -notched strips in bending. Solution 2.

The deformation mode along the neck is shown in Figure 10. There is a discontinuity of the normal component of the velocity along the neck of amount

$$|\Delta v| = 2y.$$

Along the neck  $\Psi = \pi/2$  and the principal stresses and strain rates are

$$\dot{\epsilon}_1 = \frac{y}{b} \text{ (normal to the neck) ,}$$

$$\dot{\epsilon}_2 = 0 \text{ (along the neck) ,}$$

$$\dot{\epsilon}_3 = \frac{y}{b} \text{ (normal to the strip plane) ,}$$

where  $b$  is the local breadth of the neck.

$$\sigma_1 = \frac{2}{\sqrt{3}} Y, \quad \sigma_2 = \frac{Y}{\sqrt{3}}, \quad \frac{c}{a} = \frac{1}{1 + \frac{2}{\sqrt{3}}},$$

in which  $C = ON$ . The constraint factor for  $0 \leq \alpha \leq 70^\circ 32'$  has the constant value (Figure 12)

$$L_u = \frac{2}{\left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\right) = 1.072.$$

The field remains unaltered for this region. In Table 3 the sizes of the field, the maximum stress, and the upper bound for the constraint factor are given.

### (B) Lower Bound

Figure 11 shows the statically admissible stress field discussed previously fitted to  $V$ -notched strips.

(a) For  $0 \leq \alpha \leq 67^\circ$ ,  $\beta = 23^\circ = \text{const}$ :

$$\sigma_1 = \frac{2}{\sqrt{3}} Y, \quad \frac{d}{c} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

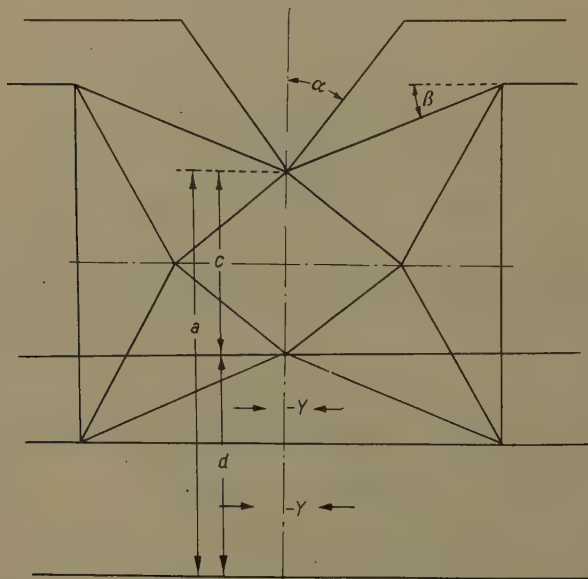


Figure 11  
Lower bound for  $V$ -notched strips in bending.

and therefore

$$\frac{c}{a} = \frac{1}{1 + \frac{2}{\sqrt{3}}}$$

Substituting in equation (27)

$$L_1 = \left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\right) = 1.072 = \text{const.}$$

We see that for  $0^\circ \leq \alpha \leq 67^\circ$  both upper and lower bounds coincide the value 1.072 being therefore the true constraint factor.

Table 3

$\alpha$	$90^\circ$	$85^\circ$	$80^\circ$	$75^\circ$	$70^\circ$	$67^\circ$	$67^\circ \leq \alpha \leq 0^\circ$
$\varphi_0$	$54^\circ 44'$	$47^\circ$	$38^\circ 30'$	$27^\circ 30'$	$0^\circ$	$0^\circ$	
$\sigma_m/Y$	1.0	1.053	1.095	1.124	1.155	1.155	1.155
$c/a$	0.50	0.486	0.477	0.470	0.464	0.464	0.464
$L_u$	1.00	1.025	1.045	1.060	1.070	1.072	1.072
$\beta$	$0^\circ$	$5^\circ$	$10^\circ$	$15^\circ$	$20^\circ$	$23^\circ$	$23^\circ$
$\sigma_1/Y$	1.00	1.053	1.102	1.132	1.150	1.155	1.155
$L_1$	1.00	1.025	1.045	1.060	1.070	1.072	1.072

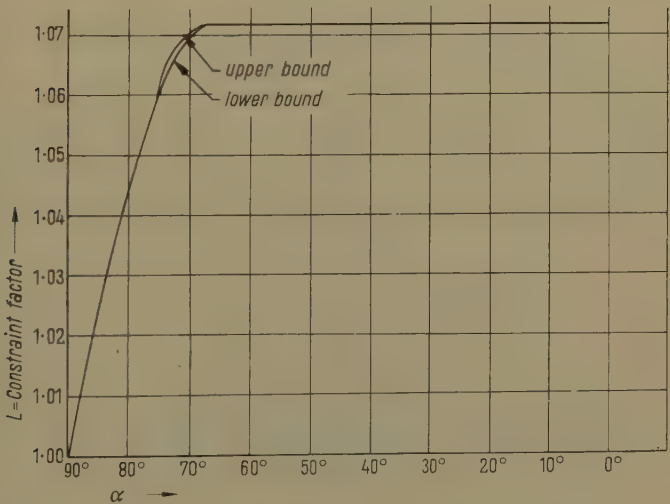


Figure 12  
Single V-notched strip in bending.

(b) For  $67^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$ :

We take  $\beta = \pi/2 - \alpha$ . The constraint factor is given by

$$L_1 = \frac{2 \frac{\sigma_1}{Y}}{\left(1 + \frac{\sigma_1}{Y}\right)}. \quad (41)$$

Using equations (12) and (21a)  $\sigma_1/Y$  in terms of  $\beta$  can be found. Substituting this value in equation (41) the lower bound for the constraint factor is calculated (Table 3 and Figure 12). We can see that the difference is almost zero, and the two bounds practically coincide for this region as well. The maximum stress along the notch axis also is almost the same in both bounds.

## Case 2: Plastic Bending of Circularly Notched Strips

### (A) Upper Bound

#### Solution 1

The field of characteristics in the upper region is radially symmetrical, as in a hole expanded by internal pressure (Figure 13). It is defined by the para-

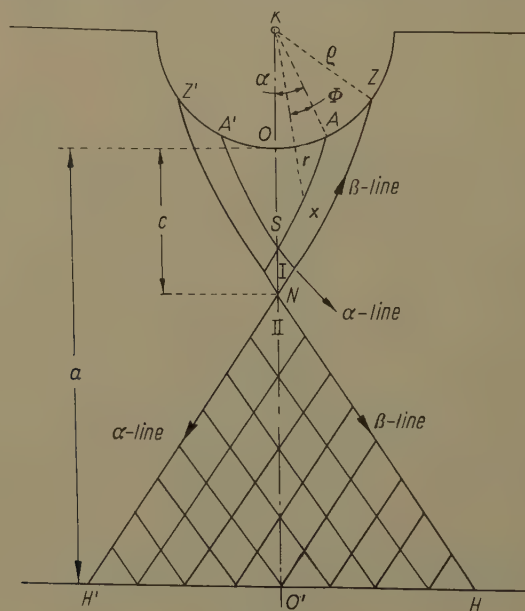


Figure 13

Characteristics for circularly notched strip in bending. Solution 1.



metric equations:

$$\sigma_r = 2k \sin\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right), \quad \sigma_\theta = 2k \sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right), \quad \frac{r^2}{\varrho^2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \sec\theta e^{\sqrt{3}(\theta - \pi/6)}, \quad (42)$$

where  $\theta = \tan^{-1}(\sqrt{3} \sin \Psi)$ .

The field is drawn as follows. Let us take the characteristic  $AS$ :

Since  $\sigma_r \leq \sigma_\varphi$ ,  $\omega_A = \alpha$  and since  $\sigma_r = 0$ ,  $\theta_A = \pi/6$ ,  $\Psi_A = 19^\circ 28' = 0.340$ ,  $\lambda_A(\pi/6) = 0.447$  (HILL [3], p. 350, Table 2). Also  $\omega_X = \alpha - \varphi$ . Along the line  $AS$  it is:  $\omega + \lambda = \text{const}$ . Therefore

$$\lambda_x(\theta) + \alpha - \varphi = 0.447 + \alpha$$

or

$$\varphi = \sin^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{3}} \sin\theta\right) - \frac{1}{3} \sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}} \tan\theta\right) - 0.447. \quad (43)$$

Equations (42) and (43) are the equations of the characteristic  $AS$  in parametric form.

The upper and lower field extend until they meet in  $N$ .

From the equilibrium equation it follows:

$$(a - c) Y = \int_c^{c+a} \sigma_\theta dr = 2k \varrho \int_c^{c+a} \sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) \frac{d}{d\theta} \left[ \frac{\sqrt{3}}{2} \sec\theta e^{\sqrt{3}(\theta - \pi/6)} \right]^{1/2} d\theta,$$

and therefore

$$\frac{a}{\varrho} = \frac{c}{\varrho} + \frac{2}{\sqrt{3}} \int_1^{1+c/\varrho} \sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) d\left(\frac{r}{\varrho}\right). \quad (44)$$

By means of equation (44),  $c/a$  in terms of  $a/(a + \varrho)$  is calculated and plotted in Figure 14.

As was sought previously, the angle of rotation  $\Delta\varphi$  of the characteristic  $ZN$  (in order that  $HN$  can meet  $ZN$ ) must be greater than

$$(\lambda_N)_I - (\lambda_N)_{II} + \left(\frac{\Psi_N}{2}\right)_I - \left(\frac{\Psi_N}{2}\right)_{II}.$$

But from Figure 13 it follows

$$\Delta\varphi = \frac{\pi}{4} + \left(\frac{\Psi_N}{2}\right)_{II} + \beta, \quad (\Psi_N)_{II} = \frac{\pi}{2} - 2\beta \text{ and } (\lambda_N)_{II} = -0.447.$$

Therefore

$$(\lambda_N)_I \leq \frac{\pi}{4} + \beta + (\lambda_N)_{II} + \left(\frac{\Psi_N}{2}\right)_{II} = 1.103.$$

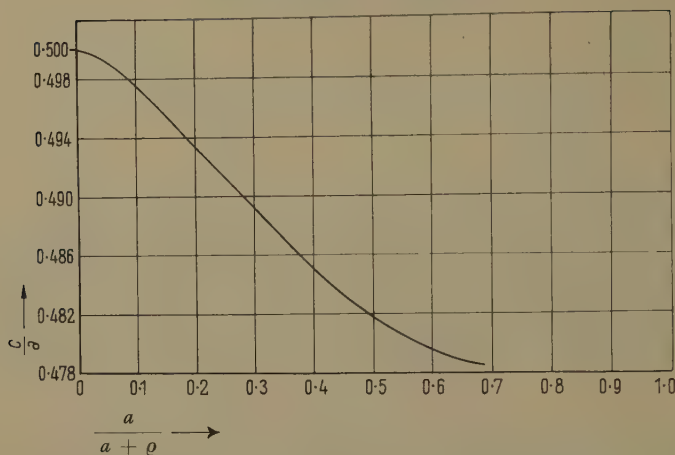


Figure 14

Curve giving the solution of equation (44).

But it is always  $\lambda \leq \pi/4$  so this condition is fulfilled until a neck is formed. The neck is formed when the characteristics coincide on the axis. In this case:

$$\Psi = \frac{\pi}{2}, \quad \theta = \frac{\pi}{3}, \quad \frac{r^2}{\varrho^2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{1/2} e^{\sqrt{3}} \frac{\pi}{6} = 4.265, \quad \left(\frac{c}{\varrho}\right)_{\text{limit}} = 1.071.$$

Substituting in equation (44) we find

$$\left(\frac{a}{\varrho}\right)_{\text{limit}} = 2.245.$$

This solution is therefore valid for

$$0 \leq \frac{a}{a + \varrho} \leq 0.692. \quad (45)$$

#### CONSTRAINT FACTOR

Taking the moments of the normal stresses across the axis we find

$$\left. \begin{aligned} L_u = \frac{4M}{Y a^2} = -4 \frac{\varrho^2}{a^2} \int_{\pi/6}^{\theta_N} \frac{\sin(\theta + \pi/6) \cos(\theta - \pi/6)}{\cos^2 \theta} e^{\sqrt{3}(\theta - \pi/6)} d\theta \\ + 4 \left(1 - \frac{c}{a}\right) \left(\frac{\varrho}{a} + \frac{1 + c/a}{2}\right). \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

The integral is evaluated numerically. For a certain value of  $a/(a + \varrho)$ ,  $c/a$  and therefore  $c/\varrho$  is found from Figure 14. Substituting in equation (45) we calculate  $L_u$  (Table 4 and Figure 17).

### Solution 2

For  $0.692 \leq a/(a + \rho) \leq 1$  the field of characteristics extends over an angular span of  $38^\circ 56'$ . A neck is formed joining the corners of the upper and lower domains (Figure 15). Normal to the neck a constant tensile stress is

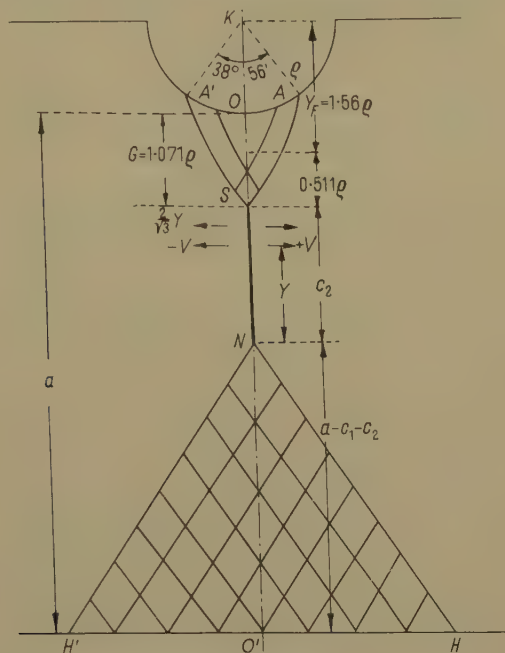


Figure 15

Characteristics for circularly notched strips in bending. Solution 2.

applied equal to  $2\sqrt{3} Y$ . The rigid parts rotate around  $N$ . Again along the neck there is a discontinuity of the normal velocity of amount:

$$|\Delta v| = 2 \gamma .$$

From the equilibrium condition it follows

$$\int_0^{2.071 \varrho} \sigma_\theta dr + c_2 \frac{2}{\sqrt{3}} Y = (a - c_1 - c_2) Y.$$

But from equation (42) and Figure 15 it follows that

$$\int_0^{2.071} \sigma_\theta dr = 1.172 Y_0.$$

Therefore

$$\frac{c_2}{a} = \frac{1 - 2.243 \varrho/a}{2.155} = 0.464 - 1.04 \frac{\varrho}{a}. \quad (47)$$

Having  $c_1$  and  $c_2$  the sizes of the field are fixed.

#### CONSTRAINT FACTOR

The point of application of the resultant force along  $ON$  has a distance from  $K$  equal to

$$x_F = \frac{\frac{2.071 \varrho}{e} \int \sigma_\theta r dr}{\int \sigma_\theta dr} = \frac{1.827 \varrho^2 Y}{1.172 \varrho Y} = 1.56 \varrho.$$

By taking the moments with respect to  $N$  we find

$$M_Y = 1.172 \varrho Y (c_2 + 0.511 \varrho) + \frac{2}{\sqrt{3}} Y \frac{c^2}{2} + Y \frac{1}{2} (a - 1.071 \varrho + c_2)^2.$$

By means of equation (47) we find

$$L_u = 1.072 - 0.123 \frac{\varrho}{a} + 0.022 \frac{\varrho^2}{a^2}, \quad 0.692 \leq \frac{a}{a + \varrho} \leq 1.0. \quad (48)$$

Values of  $L_u$  for this region have been plotted in Figure 17.

#### (B) Lower Bound

The statically admissible stress field fitted for circular notches is shown in Figure 16. From equilibrium it follows

$$d = \frac{c \sigma_1}{Y} \quad \text{and} \quad d + c + \frac{\varrho(1 - \cos \beta)}{\cos \beta} = a, \quad \frac{c}{a} = \frac{1 - \varrho/a (1 - \cos \beta)/\cos \beta}{(\sigma_1/Y + 1)}.$$

Substituting in equation (27) we find the formulae for the constraint factor

$$L_1 = 2 \left[ 1 - \frac{\varrho}{a} \cdot \frac{(1 - \cos \beta)}{\cos \beta} \right]^2 \frac{\sigma_1/Y}{(1 + \sigma_1/Y)}. \quad (49)$$

$\beta$  is defined in terms of  $\varrho/a$  so as to maximize  $L_1$ , and  $\sigma_1/Y(\beta)$  is found from equation (3) or (18). In Table 4 and Figure 17 both bounds are shown. We can see that they coincide in the greater part, their greatest difference from a mean value being less than  $\pm 0.3\%$ .





Table 4

$a/(a+g)$	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
$L_u$	1.00	1.001	1.0025	1.005	1.008	1.011	1.014	1.022	1.0424	1.059	1.072
$L_I$	1.00	1.001	1.0025	1.005	1.008	1.011	1.014	1.022	1.038	1.053	1.072

## REFERENCES

- [1] BISHOP, J. F. W., J. Mech. Phys. Solids 2, 43 (1953).  
 [2] HILL, R., J. Mech. Phys. Solids 1, 19 (1952).  
 [3] HILL, R., *Mathematical Theory of Plasticity* (Oxford, Clarendon Press, 1st ed. 1950).

## Zusammenfassung

Das Problem dünner gekerbter Flachstäbe, die unter Zug stehen, ist bereits von HILL [2] für den Fall, wo die Kerben an jeder Seite des Flachstabes symmetrisch angeordnet sind, untersucht worden. Die Verformung kommt dem ebenen Spannungszustand gleich, und HILL vermag mit Hilfe der Charakteristiken-theorie eine obere Grenzlösung für die zwei Fälle von V-förmig und kreisförmig gekerbten Flachstäben zu geben. Später konnte BISHOP [1] zeigen, dass HILLS obere Grenze die wahre Lösung für den V-förmig gekerbten Fall darstellt, bleibt aber für den kreisförmig gekerbten Fall den Beweis dafür schuldig.

In der vorliegenden Arbeit wird für beide Fälle ein statisch zulässiges mögliches Spannungsfeld (untere Grenze) gefunden; dennoch liegt die Hauptaufgabe in der Behandlung einfach gekerbter Flachstäbe bei Biegung in der Flachebene. Obere Grenzen können bei Biegung sowohl für einfach V-förmig wie für kreisförmig gekerbte Flachstäbe angegeben werden, doch ist es möglich, auch eine allgemeine untere Grenzlösung für beide Fälle zur Darstellung zu bringen.

(Received: March 22, 1957.)

## Eine Stäbchenmethode zur DK-Messung, Anwendung auf $(\text{NH}_4)_2\text{H}_3\text{JO}_6$ bei 3 cm Wellenlänge

Von HEINI GRÄNICHNER<sup>1)</sup> und WERNER SCHURTER<sup>2)</sup>, Zürich

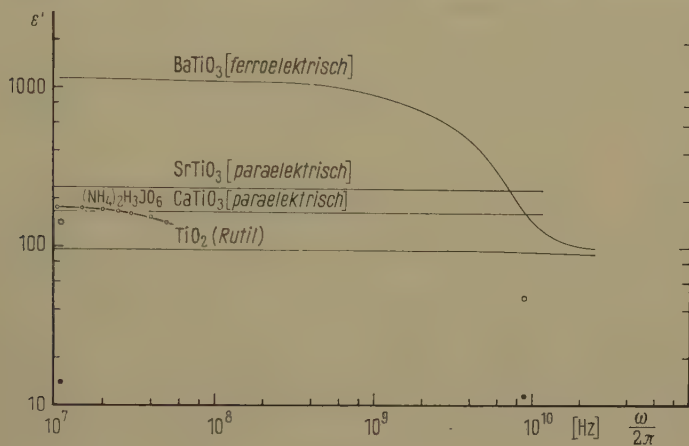
### 1. Einleitung

Die Untersuchung der Frequenzabhängigkeit der dielektrischen Eigenschaften von Isolatoren ist nicht nur technisch, sondern auch wissenschaftlich von grossem Interesse. Die elektrische Polarisierung, die in einem Ionenkristall beim Anlegen eines  $\vec{E}$ -Feldes aufgebaut wird, setzt sich aus einem Elektronenbeitrag (Verschiebung der Elektronenhülle relativ zum Atomkern) und einem

<sup>1)</sup> Physikalisches Institut der ETH.

<sup>2)</sup> Physikalisches Institut der ETH; jetzt: Imperial Chemical Industries Ltd., Billingham, England.

Ionenbeitrag (Verschiebung der verschiedenen geladenen Ionen relativ zueinander) zusammen. Die beiden Anteile unterscheiden sich in ihrer Frequenzabhängigkeit: Die Elektronenpolarisation kann Wechselfeldern mit Frequenzen bis etwa  $10^{15}$  Hz folgen. Der Ionenanteil dagegen ist nur bis zu den Gitterfrequenzen im infraroten Spektrum (etwa  $10^{12}$  Hz) wirksam. Molekülkristalle, deren Moleküle ein permanentes Dipolmoment besitzen, weisen einen zusätzlichen, in der Regel grossen Polarisationsbeitrag auf, der von der Ausrichtung der



Figur 1

Dispersion der DK von Titanaten bei 25° C [2] und von  $(\text{NH}_4)_2\text{H}_3\text{JO}_6$ :

- |     |                              |                                |
|-----|------------------------------|--------------------------------|
| ○—○ | $\epsilon_c$ bei 20° C [12], | } [13] und vorliegende Arbeit. |
| ○   | $\epsilon_a$ bei 20° C       |                                |
| ●   | $\epsilon_a$ bei -70° C      |                                |

Dipole im angelegten Feld herrührt. Da in diesem Fall ganze Moleküle oder Molekülteile umorientiert werden müssen, zeigt dieser Anteil eine Dispersion schon im Frequenzgebiet zwischen  $10^3$  und  $10^{11}$  Hz. Die dielektrischen Untersuchungen polarer Stoffe haben sich seit den grundlegenden Arbeiten von DEBYE zu einem äusserst wichtigen Hilfsmittel des Physikochemikers entwickelt, da ein enger Zusammenhang zwischen der Molekülstruktur und den dielektrischen Eigenschaften besteht [1]<sup>3)</sup>.

Ferroelektrische und antiferroelektrische Kristalle weisen in der Regel sehr hohe Werte der Dielektrizitätskonstanten (DK) auf, besonders in der Nähe ihrer Umwandlungstemperaturen. In diesen Fällen sind zwar keine permanenten Dipole beteiligt. Hingegen stehen die durch die thermischen Gitterschwingungen erzeugten induzierten Dipolmomente untereinander in derart starker

<sup>3)</sup> Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis, Seite 399.

Wechselwirkung, dass unterhalb der Umwandlungstemperatur spontan eine wesentliche Polarisierung von paralleler bzw. antiparalleler Orientierung auftritt. Es ist daher naheliegend, wie an den Stoffen mit polaren Molekülen auch hier das Dispersionsverhalten zu untersuchen, um Auskunft über den Polarisationsmechanismus zu erhalten. Diese Möglichkeit ist jedoch bis heute noch kaum ausgenutzt worden. Im Bereich der Zentimeter- und Millimeterwellen, in den die Dispersion fällt, ist es schwierig, DK-Werte von  $100 \div 10000$  genau zu messen, und man benötigt dazu für jede Frequenzoktave eine verschiedene Apparatur. Aufschlussreiche Resultate bedingen Messungen an Einkristallen verschiedener Orientierung, die oft nicht in genügender Grösse gezüchtet werden können. Ausserdem ist es nötig, das Dispersionsverhalten als Funktion der Temperatur zu untersuchen, insbesondere oberhalb und unterhalb des Umwandlungspunktes.

Einigermassen vollständige Angaben bis zu Frequenzen von  $3 \cdot 10^{10}$  Hz (1 cm Wellenlänge) liegen für die Erdalkalititanate in polykristalliner, keramischer Form vor. Diese Materialien haben technisch als Dielektrikum für raumsparende Kondensatoren grosse Bedeutung erlangt. Die in Figur 1 zusammengestellten Daten [2] wie auch die Messungen an (Ba-Sr)TiO<sub>3</sub>-Mischkristallen [3–5] zeigen, dass in der paraelektrischen Phase<sup>4)</sup> bis über  $10^{10}$  Hz hinaus keine Dispersion auftritt. Der Abfall der DK auf den Wert  $n^2 \approx 6$  erfolgt im Gebiet von  $10^{12}$  Hz, wo an BaTiO<sub>3</sub>- und SrTiO<sub>3</sub>-Kristallen verschiedene Absorptionsbanden beobachtet wurden [6]. In der ferroelektrischen Phase von BaTiO<sub>3</sub> oder von Mischkristallen dagegen beginnt die DK bereits oberhalb  $3 \cdot 10^8$  Hz abzusinken und strebt oberhalb  $3 \cdot 10^{10}$  Hz einem Wert  $\epsilon' \approx 100$  zu. Dieser Abfall im Zentimetergebiet wurde von KITTEL [7] mit der Trägheit der Bewegung der Domänenwände vom BaTiO<sub>3</sub> gedeutet.

In einer neueren Arbeit haben AKAO und SASAKI [8] die Dispersion von Seignettesalz im Temperaturintervall  $-30 \div +35^\circ\text{C}$  untersucht. Sie fanden eine Dispersionsfrequenz<sup>5)</sup> von der Grössenordnung  $3 \cdot 10^9$  Hz, die nur schwach temperaturabhängig ist. Insbesondere hat das Auftreten der spontanen Polarisierung selbst keinen Einfluss auf die Relaxationszeit. Das Dispersionsverhalten entspricht nicht einer einfachen Debye-Dispersion. Es tritt bei allen Temperaturen eine Relaxationszeiten-Verteilung auf, die mit den bestehenden Theorien der Ferroelektrizität des Seignettesalzes nicht gedeutet werden kann.

Beim Antiferroelektrikum ist die Bildung einer Domänen- oder Zwillingsstruktur elektrostatisch nicht erforderlich, da makroskopisch keine spontane Polarisierung auftritt. Bei den bis jetzt bekannten Antiferroelektrika, deren Symmetrie in der Regel beim Übergang in die antiferroelektrische Phase erniedrigt wird, bildet sich dennoch eine Zwillingsstruktur, welche ermöglicht,

<sup>4)</sup> Paraelektrisch nennt man die Phase oberhalb der Umwandlungstemperatur, wo für die DK ein Curie-Weiss-Gesetz  $\epsilon' = C/(T - \theta)$  gilt.

<sup>5)</sup>  $\nu_D = 1/2\pi\tau$ , wo  $\tau$  die Relaxationszeit bedeutet (vgl. Seite 398).



dass der Kristall als ganzes den hochsymmetrischen Habitus der Hochtemperaturphase beibehält. Eine Ausnahme bildet hierbei  $(\text{NH}_4)_2\text{H}_3\text{JO}_6$  (Diammonium-orthoperjodat): Seine trigonale Symmetrie bleibt beim Phasenübergang erhalten, und entsprechend wurde eine Zwillingsbildung bisher nicht beobachtet [9], im Gegensatz zum Silbersalz  $\text{Ag}_2\text{H}_3\text{JO}_6$  [10, 11]. Somit kann beim Ammoniumperjodat keine Relaxation von Wandverschiebungen vorhanden sein. Es überrascht daher, dass die Messungen von  $\epsilon'_c$  ( $\epsilon'$  parallel zur kristallographischen  $c$ -Achse), welche ABOAV [12] mit einem  $Q$ -Meter (Marconi Type TF 329 G), ausführte, bereits im Frequenzgebiet von  $10^7 \div 5 \cdot 10^7$  Hz einen merklichen Abfall der DK ergaben (Figur 1). Es schien uns deshalb besonders interessant, gerade bei diesem Antiferroelektrikum durch DK-Messungen im Bereich der Zentimeterwellen weitere Auskunft über das Dispersionsverhalten und insbesondere über dessen Temperaturabhängigkeit zu erhalten.

Ammoniumperjodat-Kristalle lassen sich aus wässriger Lösung mit Ammoniaküberschuss in hexagonalen Platten senkrecht zur  $c$ -Achse züchten [9, 12, 13]. Die Herstellung ist jedoch recht heikel wegen der geringen Löslichkeit des Salzes. Die grössten erhaltenen Kristalle erreichten einen Durchmesser von etwa 15 mm und eine Dicke von etwa 2 mm. Infolge der beschränkten Kristalldimensionen kam von den zahlreichen in der Literatur beschriebenen Methoden zur DK-Messung bei Zentimeterwellen (zusammengestellt in [2, 14, 15]) nur eine der Stäbchenmethoden [16–19] in Frage und somit nur die Messung von  $\epsilon_a$  (vergleiche Seite 389). Dies entspricht der Richtung, in welcher beim Phasenübergang die für die Antiferroelektrizität charakteristische Überstruktur auftritt [20].

Grössenordnung und Verlauf der zu messenden komplexen DK waren zum vornherein nicht bekannt, die Resonanzmethode war deshalb nicht zweckmässig. Wir beschränkten uns auf eine Variante, die einen minimalen apparativen Aufwand erforderte. Der orientierende Zweck unserer Messung gestattete uns, dafür eine geringere Messgenauigkeit in Kauf zu nehmen. Die verwendete Methode wurde durch Messung von Prüfsubstanzen bekannter DK geprüft. Die gesammelten Erfahrungen werden im folgenden ausführlich wiedergegeben.

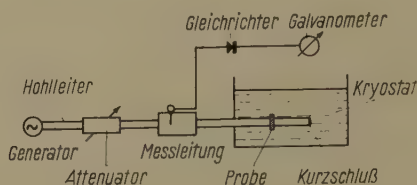
## 2. Messmethode

### 2.1 Prinzip (Figur 2)

Ein Mikrowellengenerator erzeugt im Innern eines Hohlleiters (HL) fortlaufende Wellen, welche vom abschliessenden Hohlleiterkurzschluss reflektiert werden. Der Attenuator (Dämpfungsglied) verhindert, dass ein zu grosser Teil der reflektierten Energie zum Generator zurückgelangt (Resonanzeffekte!). Durch Überlagerung der einfallenden und der reflektierten Welle entsteht zwischen Kurzschluss und Attenuator eine stehende Welle, deren Verlauf mit Hilfe einer verschiebbaren Sonde (Messleitung) ausgemessen wird. Die an der

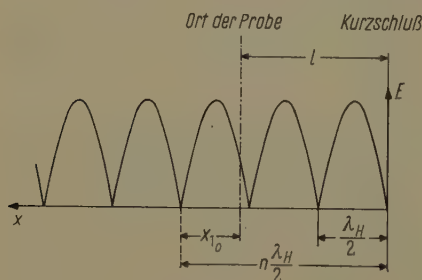
Sonde auftretende Hochfrequenzspannung wird gleichgerichtet und mit einem Galvanometer gemessen.

Im Idealfall (Kurzschluss und HL-Wände total reflektierend) ist zwischen Kurzschluss und Attenuator die elektrische Feldstärke am Ort der Wellen-

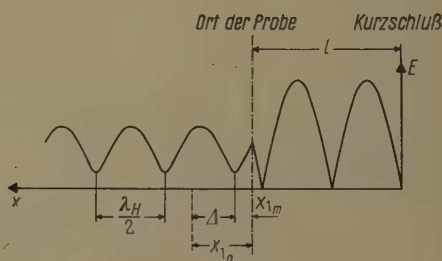


Figur 2  
Prinzipschema.

knoten null (Figur 3). Wird an einer beliebigen Stelle zwischen Kurzschluss und Messleitung eine Probe (Körper aus dem zu messenden dielektrischen Stoff,  $\epsilon' > 1$ ,  $\text{tg } \delta > 0$ <sup>6)</sup>) eingesetzt, so besitzt die hochfrequente Strahlung im Innern dieser Probe eine kürzere Wellenlänge als in Luft. Entsprechend verschieben sich Maxima und Minima der stehenden Welle zwischen Probe und Attenuator um eine Strecke  $\Delta$  (Figur 4). Ausserdem nimmt die Feldamplitude an den Knoten zu und an den Bäuchen ab. Die Grösse von  $\Delta$  wird wesentlich durch  $\epsilon'$  bestimmt, die Änderung des Amplitudenverhältnisses wesentlich durch  $\text{tg } \delta$ . Grundsätzlich kann man aus diesen Veränderungen der stehenden Welle auf



Figur 3  
Feldverlauf ohne Probe.

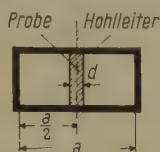


Figur 4  
Feldverlauf mit Probe.

$\epsilon'$  und  $\text{tg } \delta$  zurückschliessen, wenn die Geometrie der Probe und die Generatorfrequenz bekannt sind. In guter Näherung lösbar ist das Problem, wenn das Dielektrikum in Form eines Stäbchens von kreiszylindrischem Querschnitt

<sup>6)</sup> Die komplexe DK  $\epsilon = \epsilon' - i\epsilon''$  wird durch ihren Realteil  $\epsilon'$  und den Verlustfaktor  $\text{tg } \delta = \epsilon''/\epsilon'$  charakterisiert.

nach Figur 5 durch den HL hindurchgesteckt wird. Diese *Stäbchenmethode* für HL-Wellen wurde in 2 Varianten schon von LE BOT und LE MONTAGNER [16–18] verwendet. Die Impedanzmessung geschieht bei Proben mit kleinem  $\varepsilon'$  und  $\operatorname{tg} \delta$  am empfindlichsten in einer kurzgeschlossenen Leitung, bei höheren Werten dagegen in einer reflexionsfrei abgeschlossenen Leitung.



Figur 5

Hohlleiter mit Stäbchen.

Für unsere Zwecke musste die Stäbchenmethode aus folgendem Grund modifiziert werden: In dem zu untersuchenden Temperaturintervall von  $-70 \div +20^\circ \text{C}$  war zu erwarten, dass die komplexe DK sowohl kleine als auch grosse Werte annimmt. Während einer Messung bei tiefen Temperaturen lassen sich aber Kurzschluss und reflexionsfreier Abschluss aus technischen Gründen nicht leicht gegenseitig auswechseln. Wir verwendeten ausschliesslich die kurzgeschlossene Leitung. Die Ausmessung der stehenden Welle geschah mit einer geeichten Messleitung, während der Kurzschluss für die Dauer der Messung einer bestimmten Probe unverändert blieb. Für jede Probe wurde durch Verschiebung des Kurzschlusses diejenige Stellung gewählt, in der die Apparatur am empfindlichsten misst. Das inverse Verfahren (geeichter Kurzschlusskolben, feste Sonde [16–18]) eignet sich in unserem Fall nicht, weil die exakte Messung der Kolbenstellung temperaturempfindlich wäre.

## 2.2 Der Hohlleiter als Leitung [21]

Im verwendeten HL (siehe unten) tritt nur die  $H_{10}$ -Welle ( $TE_{10}$ -Welle [21]) auf, bei welcher das  $\vec{E}$ -Feld überall parallel zur kleineren Rechteckseite  $b$  des HL-Querschnittes verläuft. Die Leitungs-Wellenlänge  $\lambda_H$  in Richtung der HL-Achse beträgt dann für ein unmagnetisches, dielektrisch verlustarmes Innenmedium ( $\mu_i = 1$ ,  $\varepsilon_i'$  beliebig,  $\operatorname{tg} \delta_i \ll 1$ ):

$$\lambda_H = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_G}\right)^2\right] \varepsilon_i}}, \quad (1)$$

wobei  $\lambda_0 = 2\pi c/\omega$  = Vakuum-Wellenlänge im freien Raum;  $\omega$  = Generatorfrequenz;  $\lambda_G = 2a$  = Grenzwellenlänge;  $a$  = grössere Rechteckseite des HL-Querschnittes.  $\lambda_G$  ist definiert als das  $\lambda_0$  der tiefsten Frequenz, welche theoretisch im gegebenen HL noch eine fortpflanzungsfähige Welle erzeugt.

### 2.3 Dielektrischer Zylinder im Hohlleiter

Ein dielektrischer Körper im Innern eines HL wirkt als elektrisches «Hindernis», das heisst, die elektrischen und magnetischen Feldlinien werden gegenüber dem Verlauf bei ungehinderter Ausbreitung verzerrt. Daraus folgt, dass im Bereich zwischen einem Ort «vor» dem Hindernis und einem Ort «nach» dem Hindernis der Feldverlauf als Summe vieler verschiedener Wellentypen von nicht vernachlässigbarer Amplitude dargestellt werden muss [21] und damit der einfachen Leitungsgleichung nicht mehr gehorcht. Dagegen sind in genügender Entfernung vom dielektrischen Körper die Amplituden der störenden Wellentypen so weitgehend abgeklungen, dass sie vernachlässigt werden können. Man kann deshalb das Hindernis und seine nähere Umgebung stets durch einen äquivalenten elektrischen *Vierpol* ersetzen. Ist die geometrische Ausdehnung des dielektrischen Körpers in Richtung der HL-Achse genügend klein gegen den HL-Querschnitt, so reduziert sich der Vierpol auf eine einfache *Shuntimpedanz*.

Steht ein kreiszylindrisches Stäbchen vom Durchmesser  $d$  und aus einem homogenen Dielektrikum der DK  $\varepsilon = \varepsilon' - i\varepsilon''$  in einem rechteckigen  $H_{10}$  - HL nach Art der Figur 5, so beträgt nach [21] die äquivalente Shuntimpedanz:

$$Z_D = \frac{\frac{2}{\varepsilon - 1} \left( \frac{\lambda_0}{\pi d} \right)^2 - \frac{1}{4} \cdot \frac{\varepsilon - 3}{\varepsilon - 1} - \log \frac{4a}{\pi d} - \Sigma + 2}{i \frac{2\lambda_H}{a}} Z_c$$

mit

$$\Sigma = 2 \sum_{\nu} \frac{1}{\sqrt{\nu^2 - (2a/\lambda_0)^2}} - \frac{1}{\nu} \quad (\nu = 3, 5, 7 \dots).$$

$Z_c$  ist die charakteristische Impedanz [22] des HL. Die Beziehung gilt auf ein paar Prozente genau, falls  $d/a \leq 1/10$  und  $|\varepsilon| \leq 20$ .

Kennt man umgekehrt die *spezifische Admittanz*  $Y_D' = Y_D/Y_c = Z_c/Z_D = G' + iB'$  der Probe, so erhält man daraus ihre DK:

$$\varepsilon' - 1 = D \frac{\beta}{\beta^2 + \gamma^2}, \quad \varepsilon'' = D \frac{\gamma}{\beta^2 + \gamma^2} \quad (2)$$

mit

$$\left. \begin{aligned} \beta &= A \frac{B'}{B'^2 + G'^2} + \log \frac{4a}{\pi d} + \Sigma - \frac{7}{4}, \\ \gamma &= A \frac{G'}{B'^2 + G'^2}, \end{aligned} \right\} \begin{aligned} D &= 2 \left( \frac{\lambda_0}{\pi d} \right)^2, \\ A &= \frac{2\lambda_H}{a}. \end{aligned}$$

Unter den Voraussetzungen, unter denen diese Beziehungen gelten, werden beim

<sup>7)</sup>  $Y_c$  heisst die charakteristische Admittanz der Leitung,  $G'$  die spezifische Konduktanz und  $B'$  die spezifische Suszeptanz der Probe.

Einführen der dielektrischen Probe in den HL die  $\vec{E}$ -Feldlinien in der nächsten Umgebung nur wenig aus ihrer Richtung parallel zur Stäbchenachse abgelenkt. Berücksichtigt man zudem, dass die Feldlinien beim Eintritt ins Innere des Dielektrikums von der Oberflächennormale weg gebrochen werden, so kommt man zum Schluss, dass das  $\vec{E}$ -Feld im ganzen Innern praktisch parallel zur Zylinderachse steht. Im Falle eines anisotropen Dielektrikums misst man somit die DK in dieser Richtung.

#### 2.4 Impedanzmessung im kurzgeschlossenen Hohlleiter

Die Shuntimpedanz  $Z_D$  liegt parallel zur Impedanz  $Z_0$  des leeren Leitungstückes zwischen Probe und Kurzschluss. Da sich parallel liegende Admittanzen addieren, erhält man  $Y_D$  als Differenz der Admittanzmessung  $Y_m$  mit eingesetzter Probe und der Messung  $Y_o$  ohne Probe:  $Y_D = Y_m - Y_o$ . Nach der allgemeinen Leitungstheorie kann man die Admittanz an einer Leitungsstelle berechnen aus dem Verlauf der stehenden Welle « vor » dieser Stelle; sowohl für die Messung mit Probe als auch für die Messung ohne Probe gilt

$$Y' = \frac{1 - r}{1 + r}.$$

$r$  ist der komplexe Reflexionskoeffizient und beträgt seinerseits

$$r = \frac{1 - \eta}{1 + \eta} \exp(i 2 \alpha).$$

Hierbei bedeutet  $\eta = E_{\min}/E_{\max}$  das Verhältnis von minimaler und maximaler Amplitude der elektrischen Feldstärke der stehenden Welle<sup>8)</sup>,  $\alpha = k_H x_1$ ;  $x_1$  ist der Abstand des 1. Feldstärkeminimums vom Ort der Probe und  $k_H = 2\pi/\lambda_H$ . Damit wird

$$Y_D' = \frac{1 - i \eta_m \operatorname{tg} \alpha_m}{\eta_m - i \operatorname{tg} \alpha_m} - \frac{1 - i \eta_o \operatorname{tg} \alpha_o}{\eta_o - i \operatorname{tg} \alpha_o}.$$

Zerlegt man  $Y_D'$  in Real- und Imaginärteil, so erhält man

$$G' = \frac{\eta_m (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_m)}{\eta_m^2 + \operatorname{tg}^2 \alpha_m} - \frac{\eta_o (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_o)}{\eta_o^2 + \operatorname{tg}^2 \alpha_o}, \quad (3a)$$

$$B' = \frac{(1 - \eta_m^2) \operatorname{tg} \alpha_m}{\eta_m^2 + \operatorname{tg}^2 \alpha_m} - \frac{(1 - \eta_o^2) \operatorname{tg} \alpha_o}{\eta_o^2 + \operatorname{tg}^2 \alpha_o}. \quad (3b)$$

### 3. Apparatur

Als *Generator* wurde ein Reflexklystron [24] vom Typ « 2K25 » im Frequenzintervall  $(8,73 \div 8,83) \cdot 10^9$  Hz verwendet, entsprechend  $\lambda_0 = 3,44 \div 3,40$  cm

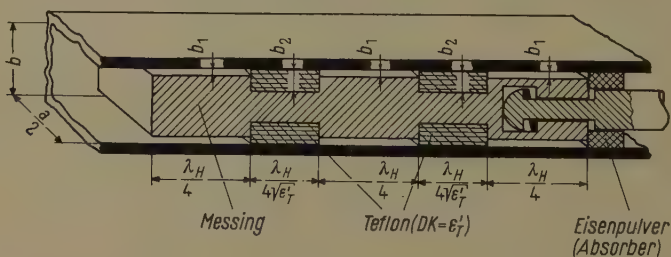
<sup>8)</sup> Im englischen Sprachgebrauch mit « inverse voltage standing wave ratio » bezeichnet.



oder  $\lambda_H = 5,20 \div 5,07$  cm. Die Reflektorspannung wurde vor jeder Messung (Änderung der Stellung des Kurzschlusskolbens) auf maximale Ausgangsleistung eingestellt, um die Leistungsschwankungen auf ein Minimum zu reduzieren. Jede Änderung der Reflektorspannung bewirkt gleichzeitig eine leichte Verschiebung der Frequenz.  $\lambda_H$  wurde deshalb vor jeder Impedanzmessung neu bestimmt. Als *Hohlleiter* wurde ein Al-Rechteckprofil mit polierten Innenflächen und den Innenmassen  $22,86 \times 10,16$  mm verwendet. Als Durchführung des HL durch die Kryostatwand diente ein 10 cm langes Profilstück aus dünnem Neusilberblech. Zur Vermeidung von Wärmekonvektion und Kondenswasser enthielt diese Durchführung ein Glimmerfenster von rund 0,01 mm Dicke. Im HL-Stück zwischen Messleitung und Kurzschluss wurden Kontaktkupplungen verwendet. Die übrigen Kupplungen waren kapazitiv [25].

Der *Attenuator* [14] wurde auf einen Dämpfungswert von 12 db eingestellt. Die *Messleitung* («slotted line») war vom Institut für Hochfrequenztechnik an der ETH gebaut worden und besass eine verschiebbare Sonde von 2,5 mm Eindringtiefe und 0,5 mm Durchmesser. Wir versahen sie mit Feintrieb und Messuhr, wodurch eine Messgenauigkeit von 0,01 mm möglich wurde. Der *Gleichrichter* (Si-Diode «1N23») war mit der Messleitung zusammengebaut. Er besass im verwendeten Bereich in guter Näherung [26] eine quadratische  $J_{\sim}/U_{\sim}$ -Charakteristik, der Richtstrom war also proportional der Intensität des  $\vec{E}$ -Feldes. Zur Messung des Richtstroms diente ein Lichtzeiger-Galvanometer von 0,9  $\mu$ A Vollausschlag und einer Ablesegenauigkeit von  $10^{-9}$  A im empfindlichsten Bereich.

Der *Kurzschlusskolben* (Figur 6) war verschiebbar und wurde auf der Ober- und Unterseite durch Teflonquader geführt. Die vom Generator her von links



Figur 6  
Kurzschlusskolben.

einfallende Welle dringt zu einem kleinen Teil in den obern und untern Luftspalt ein, erfährt an den verschiedenen Luft-Teflon-Grenzflächen Mehrfachreflexion und erreicht teilweise die Absorberschicht (hinter der keine Reflexion mehr auftritt). Die speziell gewählten Längendimensionen des Kolbens bewirken, dass sich eindringende und reflektierte Strahlung weitgehend auslöschen.

Der Absorber verhindert, dass sich der Grad dieser Auslöschung und damit der Reflexionskoeffizient des gesamten Kolbens mit der Kolbenstellung ändert. Der ganze HL-Abschluss mit Kurzschlusskolben befand sich im Kryostaten.

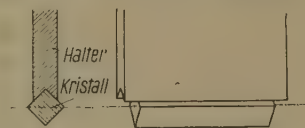
Der *Kryostat* bestand aus einem durch eine 4 cm dicke Schaumplastikschicht isolierten Trog, der ein Alkoholbad enthielt. Die Abkühlung des Bades erfolgte durch Trockeneis, die Erwärmung mit Hilfe einer Heizspirale. Die Erwärmung des Bades infolge von Wärmeleitungsverlusten betrug bei  $-70^{\circ}\text{C}$  rund  $1/7^{\circ}\text{C}/\text{min}$ , bei höheren Temperaturen entsprechend weniger. Die *Probenzylinder* waren je auf einen Halter aus Messing gekittet und wurden durch eine Bohrung in der Oberseite des HL in diesen eingeführt. Die *Temperatur* wurde an der Aussenfläche des HL, unmittelbar unterhalb der Probe, mit einem geeichten Cu-Konstantan-Thermoelement gemessen. Ein Versuch hatte ergeben, dass die Temperatur hier hinreichend genau mit der Lufttemperatur im Innern des HL übereinstimmt. Vor und nach jeder Impedanzmessung (Dauer  $1 \div 4$  min) wurde je eine Temperaturmessung vorgenommen, wobei der Mittelwert verwendet wurde.

#### 4. Experimentelles

##### 4.1 Herstellung der Proben

Von den zu untersuchenden Substanzen wurden zylindrische Stäbchen von mindestens 13 mm Länge und mit einem Durchmesser zwischen 1 und 5 mm hergestellt. Die Zylinder aus Teflon, Polyäthylen und Plexiglas wurden auf der Drehbank bearbeitet. Das destillierte Wasser wurde in einem Glasröhrchen von etwa 0,05 mm Wanddicke gemessen. Nach jeder Messung des gefüllten Röhrchens wurde noch der leere Behälter gemessen und dessen Admittanzwert von demjenigen des vollen Röhrchens subtrahiert.

Die Kristalle wurden zu Stäbchen von quadratischem Querschnitt gesägt. Zum Rundschleifen wurde das Stäbchen auf einen Halter (Figur 7) gekittet, welcher um einen Winkel  $\pm 45^{\circ}$  um die Stäbchenachse hin- und hergedreht wurde. Eine horizontal gelagerte, glatte Cu-Platte, die mit einer Paste von Karborundpulver und Petrol bestrichen war, übte von unten her einen leichten Druck auf die zu schleifende Kristallkante aus. Analog wurden nacheinander auch die übrigen Kanten runds geschliffen. Die Ungenauigkeit des Durchmessers der so bearbeiteten Kristalle betrug höchstens  $\pm 0,1$  mm. Die mechanische Beanspruchung der Stäbchen beim Runds schleifen war gross; rund die Hälfte der Kristalle zerbrachen. Bessere Resultate dürften sich bei der Verwendung eines Pulverstrahl-Apparates erzielen lassen, welcher sich bei der Bearbeitung von spröden organischen Einkristallen bewährte [27].



Figur 7

Kristallhalter für Runds schleifen.

#### 4.2 Bestimmung von $\text{tg}\alpha$ , Einstellung des Kurzschlusskolbens

Die Grösse  $\text{tg}\alpha_o$  [Gleichungen (3)] kann man auf die feste Distanz  $l$  zwischen Probe und Kurzschluss zurückführen. Aus Figur 3 sieht man:  $x_{1o} = n \lambda_H/2 - l$  ( $n$  = ganze Zahl), also

$$\text{tg}\alpha_o = -\text{tg}(k_H l). \quad (4a)$$

Nach Einsetzen der Probe hat man nach Figur 4:  $x_{1m} = x_{1o} - \Delta$ , also

$$\text{tg}\alpha_m = -\text{tg}[k_H (l + \Delta)]. \quad (4b)$$

Der Ort des Minimums der stehenden Welle wurde stets indirekt bestimmt als arithmetisches Mittel der zwei  $x$ -Werte, aus denen auch  $\Delta x$  (siehe Seite 394) bestimmt wurde. Die Annahme, dass das Minimum in der Mitte zwischen den Flankenpunkten gleicher Intensität liegt, ist infolge der Sondenreflexion [14] nicht exakt richtig. Der dadurch verursachte Fehler erwies sich als vernachlässigbar. Bei den Proben mit  $\epsilon' \approx 2$  wurde der Ort des Minimums versuchsweise auch direkt bestimmt: Bei  $d = 1$  mm wurden auf diese Weise die Resultate bedeutend schlechter, während sich bei dickeren Proben gleichgute Resultate ergaben.

Unsere Erfahrungen zeigten, dass grundsätzlich um so genauere Resultate erzielt werden, je grösser  $\text{tg}\alpha_o$  und  $\text{tg}\alpha_m$  sind. Bei der Ermittlung der optimalen Stellung des Kurzschlusskolbens hat man daher 3 Fälle zu unterscheiden:

a) Bei *kleinen Impedanzen*  $[(\alpha_o - \alpha_m) > \pi/2]$  wird man den Kolben so einstellen, dass  $\alpha_o$  und  $\alpha_m$  symmetrisch zu  $N\pi$  liegen ( $N$  = ganze Zahl). Daraus folgt als Bedingung:

$$l = N \frac{\lambda_H}{2} - \frac{\Delta}{2}.$$

b) Bei *mittleren Impedanzen*  $[\pi/12 \leq (\alpha_o - \alpha_m) \leq \pi/2]$  sollen  $\alpha_o$  und  $\alpha_m$  symmetrisch zu  $\pi/2 + N\pi$  liegen, weil in diesem Fall  $\text{tg}\alpha_o$  und  $\text{tg}\alpha_m$  grösser werden. Daraus folgt

$$l = \left(N + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda_H}{2} - \frac{\Delta}{2}.$$

c) Bei *grossen Impedanzen*  $[(\alpha_o - \alpha_m) \leq \pi/12]$  würden bei obiger Kolbenstellung die  $\text{tg}\alpha \rightarrow \infty$  gehen, so dass die Methode ungeeignet wird. Man wählt in diesem Falle am besten:

$$l \approx \left(N + \frac{4}{9}\right) \frac{\lambda_H}{2}.$$

$\alpha_o$  besitzt dann den günstigen Wert

$$\frac{10}{9} \cdot \frac{\pi}{2} + N\pi,$$

und  $\alpha_m$  liegt um wenigstens tiefer, das heisst,  $\text{tg}\alpha_m$  wird grösser (ohne aber  $\rightarrow \infty$

zu werden). Messungen mit

$$l \approx \left(N + \frac{5}{9}\right) \frac{\lambda_H}{2},$$

wo

$$\alpha_o \approx \frac{8}{9} \cdot \frac{\pi}{2} + N\pi$$

und  $\text{tg} \alpha_m$  gegen kleinere Werte hin verschoben wird, ergaben schlechtere Resultate.

Der voraussichtliche Wert von  $\Delta$  muss rechnerisch abgeschätzt oder durch eine Messung in erster Näherung bestimmt werden.  $N$  ist so klein wie experimentell möglich zu halten, damit der Leitungsverlust des HL die Messgenauigkeit nicht unnötig vermindert.

Bei  $|\varepsilon| > 20$  stellt die Formel für  $Z_D$  auf Seite 388 eine schlechte Approximation dar, und bei noch höheren DK-Werten ist die Darstellung des quivalenten Vierpols durch eine einfache Shuntimpedanz nicht mehr erlaubt (systematische Fehler!). Ausserdem kommt dann die Oszillatorfrequenz  $10^{10}$  Hz in die Nähe der Resonanzfrequenz des Vierpols. Die Vierpolelemente sind dann nicht mehr stark von der DK abhängig (Streuung!). Im Gebiet von  $\varepsilon' \approx 50$ ,  $\text{tg} \delta \approx 0$  liess sich in der Kolbenstellung  $l = (N + 0,14) \lambda_H/2$  reproduzierbar messen.

### 4.3 Leitungsverlust

Infolge von Verlusten an den HL-Wänden nimmt die Intensität der fortlaufenden Welle vom Ort der Probe bis zum Ort der Sonde auf einen Bruchteil ab:

$$p \approx 1 - \frac{1}{10 \log e} \sum_i \vartheta_i l_i, \quad (5)$$

wobei  $l_i$  die Länge eines HL-Teilstückes,  $\vartheta_i$  dessen Leitungsverlust in Dezibel pro Längeneinheit. Hierbei ist über alle HL-Teilstücke zwischen Probe und Sonde zu summieren. Der Wert von  $\vartheta_i$  hängt in einfacher Weise von der elektrischen Leitfähigkeit  $\sigma_i$  des HL-Metalles ab [28]:  $\vartheta_i \propto \sigma_i^{-1/2}$ . Die Reduktion der Leistung auf den Bruchteil  $p$  hat zur Folge, dass der mit der Messleitung gemessene Wert  $E_{\min}/E_{\max} = \eta'$  grösser ist als der gesuchte Wert  $\eta$  am Ort der Probe. Die allgemeine Leitungstheorie ergibt

$$\eta' = \frac{1 + \eta - (1 - \eta) p}{1 + \eta + (1 - \eta) p}$$

oder aufgelöst nach  $\eta$

$$\eta = \frac{(1 + p) \eta' - (1 - p)}{1 + p - (1 - p) \eta'}. \quad (6)$$

### 4.4 Bestimmung von $\eta'$

Messungen von Feldamplituden verschiedener Grössenordnung werden wegen der über grössere Bereiche nicht mehr quadratischen Gleichrichtercha-

rakteristik verfälscht. Bei kleinen  $\eta'$  misst man deshalb nicht  $E_{max}$  und  $E_{min}$ , sondern den Abstand  $\Delta x$  derjenigen zwei Punkte beidseits des Minimums, bei welchen die Feldstärke  $\sqrt{2} E_{min}$  beträgt, also die Intensität  $2 I_{min}$ . Nach [2] gilt dann

$$\eta' = \frac{\pi \Delta x}{\lambda_H} - \delta. \quad (7)$$

Der Korrekturterm  $\delta$  berücksichtigt die Ungenauigkeit der Näherung. Er ist in [2] tabelliert und nur für sehr kleine  $\eta'$  vernachlässigbar.  $\Delta x$  wird für sehr kleine  $\eta'$  oft unmessbar kurz; man kann dann statt dessen die Kurvenweite  $\Delta_n x$  zwischen den zwei Punkten der Intensität  $n I_{min}$  messen, wobei nach [14]:  $\Delta x = \Delta_n x / \sqrt{n - 1}$ . Diese Näherungsformel ist mit  $n = 10$  bequem.

Zeitliche Schwankungen der Generatorfrequenz bewirken Schwankungen der örtlichen Feldstärke. Zur Bestimmung der Sondenstellungen mit  $I = n I_{min}$  wurden diese Intensitätsschwankungen während eines längeren Zeitintervalls beobachtet und berücksichtigt (rund 1 min).

## 5. Resultate

### 5.1 Prüfsubstanzen und Phosphate

Tabelle 1

Dielektrikum	d mm	$\epsilon'$	$\text{tg } \delta \cdot 10^2$	Vergleichswerte [2]	
				$\epsilon'$	$\text{tg } \delta \cdot 10^2$
Teflon . . . .	1,01	$1,9 \pm 0,2$	$< 7$	2,08	0,04
Polyäthylen .	1,05	$2,0 \pm 0,15$	$< 5$	2,25	0,04
Plexiglas . . .	0,99	$2,7 \pm 0,15$	$< 8$	2,59	0,67
	1,97	$2,4 \pm 0,1$	$< 2,5$		
	3,04	$2,6 \pm 0,1$	$< 1,5$		
	4,00	$2,5 \pm 0,1$	$< 2,5$		
	5,04	$2,62 \pm 0,06$	$< 3$		
$\text{NH}_4\text{H}_2\text{PO}_4 \parallel c$	1,52	$11 \pm 2$	$4 \pm 1,5$	13,7	0,5
	$\parallel a$	$39 \pm 3$	$1 \pm 0,5$		
$\text{KH}_2\text{PO}_4 \parallel c$	1,42	$19 \pm 2$	$2 \pm 1$	20,2 <sup>2)</sup>	$< 0,05^2)$
	$\parallel a$	$29 \pm 1$	$2 \pm 0,3$		
Wasser . . .	0,800	$65 \pm 1,5$	$38 \pm 0,6$	54 <sup>4)</sup>	64 <sup>4)</sup>

1) Bei  $10^4 \div 3 \cdot 10^8$  Hz.

2) Bei  $10^6 \div 10^8$  Hz.

3) Bei  $10^3 \div 10^8$  Hz.

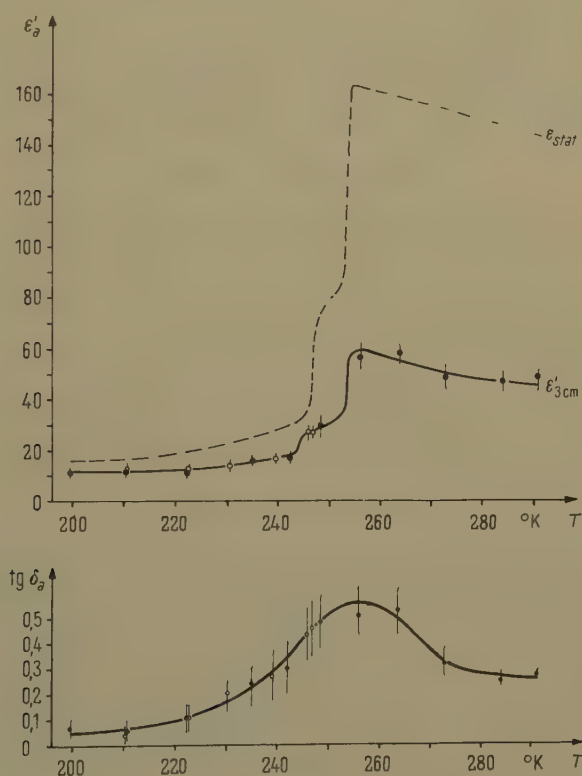
4) Interpoliert für 18°C und  $8,8 \cdot 10^8$  Hz.



Die Temperatur betrug je nach Messung  $18 \pm 20^\circ\text{C}$ , die Frequenz  $(8,73 \div 8,83) \cdot 10^9$  Hz. Die Fehlerschranken geben den möglichen zufälligen Fehler wieder. Die Vergleichswerte [2] verstehen sich für  $22 \div 27^\circ\text{C}$  und, wo nichts anderes vermerkt, für  $10^{10}$  Hz.

### 5.2 Ammoniumperjodat

Die Temperaturkurve der DK senkrecht zur  $c$ -Achse ist in Figur 8 wieder gegeben. Die Messreihe mit fallender Temperatur ist durch volle Kreise dargestellt, diejenige mit steigender Temperatur durch leere Kreise. Die Generatorfrequenz betrug  $8,74 \cdot 10^9$  Hz, entsprechend  $\lambda_H = 5,18$  cm. Die Probe hatte einen Durchmesser von 1,57 mm. Der maximal mögliche zufällige Fehler wurde graphisch wiedergegeben. Die gestrichelte Kurve gibt den Verlauf der statischen DK nach BAERTSCHI [13].



Figur 8

Temperaturabhängigkeit von  $\epsilon'_a$  und  $\text{tg } \delta_a$  von  $(\text{NH}_4)_2\text{H}_3\text{JO}_6$ .

## 6. Diskussion der Messmethode

### 6.1 Zufällige Fehler

Der Einfluss einer grossen Zahl möglicher Fehlerquellen wurde abgeschätzt. Wichtig sind nur die Schwankungen der Frequenz und die Abweichung der Gleichrichtercharakteristik vom quadratischen Verlauf. Bei Einkristallen, welche wegen ihrer Sprödigkeit nicht auf der Drehbank bearbeitet werden können, spielt auch die Abweichung von der geometrischen Form eines Zylinders eine Rolle.

Die in Figur 8 eingezeichneten Fehlerschranken sind offensichtlich zu gross. Das war zu erwarten, da der Einfluss der Frequenzschwankungen beträchtlich reduziert werden konnte, indem alle Intensitätswerte während eines längeren Zeitintervalles beobachtet wurden (Seite 394). Die den Resultaten in Tabelle 1 beigefügten Fehlerschranken enthalten nur einen Anteil von  $1/3$  der maximal möglichen Frequenzschwankungsfehler.

Beobachtete Streuung: Die Ungenauigkeit von  $\epsilon'$  und  $\operatorname{tg} \delta$  ist eine Funktion der DK und des Stäbchendurchmessers. Wir beobachteten für  $\operatorname{tg} \delta < 10^{-2}$  und  $d = 1,5$  mm im Mittel folgende Streuungen der Resultate:

$\epsilon' \approx$	Streuung von $\epsilon'$ (relativ)	Streuung von $\operatorname{tg} \delta$ (absolut)
2,5	$\pm 5\%$	$\pm 0,005$
15	$\pm 5\%$	$\pm 0,01$
50	$\pm 10\%$	$\pm 0,01$

Bei  $\epsilon' \leq 15$  war die beobachtete Streuung kleiner als die geschätzte. Bei  $\epsilon' \approx 50$  war sie zu gross, was vermutlich auf die verringerte Empfindlichkeit der Methode in diesem DK-Bereich (Seite 393) zurückzuführen ist.

### 6.2 Systematische Fehler

Die Darstellung des elektrischen Hindernisses durch eine Shuntimpedanz und die quantitative Berechnung von  $Z_D$  (Seite 388) beruhen auf einer Näherung, die nur für dünne Proben und niedrige DK gilt. Die Verfälschung des Messresultates in Abhängigkeit von der Probendicke wurde für Plexiglas von  $1 \div 5$  mm Durchmesser untersucht (Tabelle 1). Ein systematischer Gang von  $\epsilon'$  und  $\operatorname{tg} \delta$  konnte für diesen DK-Bereich jedoch nicht festgestellt werden. Die Abhängigkeit von der DK kann durch Vergleich mit genaueren Literaturwerten beurteilt werden. Im Bereich  $\epsilon' \approx 15$  liegt nur ein Wert für  $\epsilon'_c$  von  $\text{NH}_4\text{H}_2\text{PO}_4$  vor, der bis  $10^{10}$  Hz noch keine Frequenzabhängigkeit aufweist. Für  $\epsilon'_c$  von  $\text{KH}_2\text{PO}_4$ , das nur bis  $10^8$  Hz untersucht ist, darf man dasselbe annehmen. Falls

man alle in Tabelle 1 aufgeführten Literaturwerte als richtig voraussetzt, ergeben sich für unsere Messmethode bei  $\operatorname{tg} \delta < 10^{-2}$  und  $d = 1,5$  mm folgende Verfälschungen der Resultate:

$\varepsilon' \approx$	Systematische Fehler von $\varepsilon'$ (relativ)	Systematische Fehler von $\operatorname{tg} \delta$ (absolut)
2,5	— 5%	+ 0,007
15	— 15%	+ 0,03

Bei höheren DK-Werten fehlen zuverlässige Vergleichswerte. Unsere Resultate für  $\varepsilon'_a$  von  $\text{NH}_4\text{H}_2\text{PO}_4$  und  $\text{KH}_2\text{PO}_4$  liegen um  $30 \div 35\%$  tiefer als diejenigen in [2], welche aber bis heute erst bis  $3 \cdot 10^8$  Hz bzw.  $10^8$  Hz gemessen sind. Es ist denkbar, dass die Differenz mindestens teilweise reell ist, da  $\varepsilon'_a$  der Phosphate möglicherweise eine niedrigere Dispersionsfrequenz besitzt als  $\varepsilon'_c$  und dass sich die Dispersion bereits bei  $10^{10}$  Hz in einem DK-Abfall bemerkbar macht. Unsere Messung an Wasser hat nur orientierenden Charakter, da man sich bei  $10^{10}$  Hz mitten im Dispersionsgebiet befindet und da zudem das dielektrische Verhalten wesentlich von der Reinheit abhängt.

### 6.3 Zusammenfassung

Das kreiszylindrische Stäbchen parallel zum  $\vec{E}$ -Feld ist, abgesehen von der Platte senkrecht zur HL-Achse, die einzige dielektrische Diskontinuität, deren äquivalente Impedanz in einer guten Approximation berechnet werden konnte. Die hier beschriebene Variante der Stäbchenmethode gestattet, mit einer verhältnismässig einfachen Apparatur eine (isotrope oder anisotrope) DK von Stoffen zu messen, die nur in kleinen, länglichen Stücken zur Verfügung stehen. Die Variante eignet sich speziell für orientierende Messungen, bei denen die Grössenordnung der DK nicht zum voraus bekannt ist oder bei der Messung als Funktion der Temperatur wechselt. Direkte Präzisionsmessungen sind an Stoffen mit kleinem  $\varepsilon'$  und  $\operatorname{tg} \delta$  möglich, wenn man die Messmethode weiter verfeinert: 1. Stabilisierung der Frequenz (Resonator); 2. Entkopplung des Generators mit Hilfe eines Gyrtors; 3. exakte Eichung des Gleichrichters; 4. Niederfrequenzmodulation des Generators und Verstärkung des Diodenstroms, womit sich wiederum der Generator besser entkoppeln lässt. Bei Stoffen mit *höherer* DK ist es notwendig, die Absolutgenauigkeit der Methode durch Eichmessungen zu erhöhen, wofür jedoch bei Frequenzen von  $\geq 10^{10}$  Hz nur wenige geeignete Literaturwerte vorliegen.

In einfachen Fällen können die Nomogramme von [16–18, 29] verwendet werden. Bei unserer Messanordnung erwies es sich als notwendig, alle Beziehungen und Korrekturen der Gleichungen (1) bis (7) zu verwenden, und eine Aufstellung besonderer Nomogramme lohnte sich nicht.

## 7. Diskussion der Messungen an Ammoniumperjodat

Wie aus Figur 8 ersichtlich, zeigt  $\varepsilon'_a$  bei 3 cm Wellenlänge einen analogen Verlauf mit der Temperatur wie die statische DK. Man kann mit grosser Wahrscheinlichkeit annehmen, dass die Dispersion im Zentimetergebiet als *Relaxationsprozess* und nicht als Resonanzabsorption [30] zu deuten ist.

Die einfachste Art von Relaxationsdispersion ist die einer Debye-Dispersion, gekennzeichnet durch eine einzige Relaxationszeit  $\tau$  (*monodispers*). Es gelten dann für Real- und Imaginärteil der DK die Debye-Gleichungen

$$\varepsilon'(\omega) = \varepsilon'_\infty + \frac{\varepsilon'_{\text{stat}} - \varepsilon'_\infty}{1 + \omega^2 \tau^2}, \quad \varepsilon''(\omega) = \frac{\varepsilon'_{\text{stat}} - \varepsilon'_\infty}{1 + \omega^2 \tau^2} \omega \tau.$$

In praxi findet man jedoch oft, dass der Abfall von  $\varepsilon'$  im Dispersionsgebiet im Vergleich zum Debye-Fall sich über ein grösseres Frequenzintervall erstreckt und gleichzeitig die Kurve  $\varepsilon''(\omega)$  verflacht ist. Dieses Verhalten erklärt man sich dadurch, dass nicht mehr ein einheitliches  $\tau$  vorliegt, sondern eine gewisse Relaxationszeiten-Verteilung (*polydispers* System).

Der *hochfrequente Grenzwert*  $\varepsilon'_\infty$  der DK enthält im Falle des Ammoniumperjodats den Elektronen- und den Infrarotanteil der Polarisation. Der Elektronenanteil wurde von uns bestimmt durch eine Messung des Brechungsindex bei sichtbarem Licht. Nach der Methode des DUC DE CHAULNES wurde für die gelbe Hg-Linie (578 m $\mu$ )  $n_e = 1,71 \pm 0,02$  gefunden. Da  $n_a$  etwa von gleicher Grösse sein dürfte, ist  $\varepsilon'_{a_{\text{opt}}} \approx 3$ .

In der Kristallstruktur des Ammoniumperjodats bilden die  $\text{JO}_6$ -Oktaeder Komplexe mit vorwiegend homöopolarer Bindung zwischen J- und O-Atomen. Die  $\text{JO}_6$ -Komplexe sind als ganzes fünffach negativ geladen. Die Hydrogenbindungen, welche benachbarte Oktaeder verbinden, und die Bindungen zu den  $(\text{NH}_4)^+$ -Ionen sind vorwiegend ionogenen Charakters. Es ist daher mit einem verhältnismässig grossen Infrarotanteil (« Ionenpolarisation » [30]) zu rechnen.

Um zwischen mono- und polydisperssem Verhalten entscheiden zu können, genügen die DK-Messung bei einer einzigen Frequenz im Dispersionsgebiet und die Kenntnis von  $\varepsilon'_{\text{stat}}$  nicht. Mit Bestimmtheit lassen sich jedoch über die DK parallel zu  $a$  in der Hochtemperaturphase zwei qualitative Aussagen machen, auch wenn man berücksichtigt, dass  $\varepsilon'_a$  möglicherweise systematisch zu niedrig gemessen wurde (Seite 397):

1. Die Dispersionsfrequenz  $\nu_D = 1/2 \pi \tau$  ist kleiner als die verwendete Messfrequenz ( $8,74 \cdot 10^9$  Hz).

2. Mit sinkender Temperatur nimmt  $\varepsilon'_{3\text{cm}}$  relativ stärker zu als  $\varepsilon'_{\text{stat}}$ . Dies bedeutet, dass mit fallender Temperatur  $\nu_D$  ansteigt, somit  $\tau$  abnimmt. Darin steht Ammoniumperjodat im Gegensatz zu den ferroelektrischen Kristallen  $\text{BaTiO}_3$  und Seignettesalz [2, 3–5, 8], bei welchem  $\tau$  am Umwandlungspunkt ein Maximum besitzt.

Über die antiferroelektrische Phase lassen sich analoge Aussagen nicht machen, obwohl unsere Messungen hier genauer sind. Es sind zusätzliche Resultate bei andern Frequenzen, insbesondere im Gebiet von 1 cm Wellenlänge erforderlich.

Quantitative Ergebnisse erhält man nur, wenn man rein monodisperses Verhalten voraussetzt. Man kann dann  $\tau$  und  $\epsilon'_\infty$  mit Hilfe der Debye-Gleichungen berechnen. Man erhält  $\tau$  von der Grössenordnung  $10^{-10}$  s, und  $\tau(T)$  durchläuft im Umwandlungsgebiete ein Minimum.  $\epsilon'_\infty$  wird etwa 46 in der Hochtemperaturphase und etwa 12 in der antiferroelektrischen Phase, die geringe Temperaturabhängigkeit ist gleichsinnig wie der Verlauf von  $\epsilon'_{stat}$ . Man kann sich überlegen, dass die für den monodispersen Fall berechneten  $\epsilon'_\infty$ -Werte eine obere Schranke der möglichen (polydispersen) Werte darstellen.

Die Verschiebung der Umwandlung zu höheren Temperaturen beim Ersatz der H-Atome durch D (um 15° C bei  $(\text{NH}_4)_2\text{H}_3\text{JO}_6$  [31] bzw. 40° C bei  $\text{Ag}_2\text{H}_3\text{JO}_6$  [10]) zeigt, dass es sich um «order-disorder»-Umwandlungen bezüglich der Anordnung der H-Atome auf den Hydrogenbindungen handelt [9]. Analog wie bei  $\text{KH}_2\text{PO}_4$  sind die Änderungen der H-Anordnung als primäre Ursache für den Konfigurationsanteil der Polarisierung aufzufassen. Zur Beurteilung der Polarisationsbeiträge der übrigen Ionen ist eine genaue Strukturbestimmung im Gange. Das von uns beobachtete anomale Verhalten der Relaxationszeit in der Hochtemperaturphase steht mit der antiferroelektrischen Wechselwirkung der Dipole im Zusammenhang und gibt einen weitem Hinweis auf den Polarisationsmechanismus.

Wir danken Herrn Prof. Dr. P. SCHERRER für sein förderndes Interesse an dieser Arbeit und Herrn Prof. Dr. F. TANK für die leihweise Überlassung einer Messleitung. Die Herren Dr. W. NEU und K. A. MÜLLER haben mit wertvollen Ratschlägen zum Gelingen der Messungen beigetragen.

#### LITERATURVERZEICHNIS

- [1] C. P. SMYTH, *Dielectric Behavior and Structure* (McGraw-Hill, New York 1955).
- [2] A. VON HIPPEL, *Dielectric Materials and Applications* (Wiley and Sons, New York 1954).
- [3] J. G. POWLES und W. JACKSON, Proc. Inst. Radio Engrs., N. Y. 96 (3), 383 (1949).
- [4] H. IWAYANAGI, J. phys. Soc. Japan 8, 523 (1953).
- [5] L. DAVIS und L. G. RUBIN, J. appl. Phys. 24, 1194 (1953).
- [6] J. T. LAST, Techn. Rep. 106, Lab. Ins. Res., M. I. T. 1956; Phys. Rev. 105, 1740 (1957).
- [7] C. KITTEL, Phys. Rev. 83, 458 (1951).
- [8] H. AKAO und T. SASAKI, J. Chem. Phys. 23, 2210 (1955).
- [9] W. M. MEIER und H. GRÄNICHNER, in Vorbereitung.
- [10] F. HERLACH, D. ABOAV, H. GRÄNICHNER und W. PETTER, Helv. phys. Acta 30, 252 (1957).



- [11] H. GRÄNICHER, W. M. MEIER und W. PETTER, *Helv. phys. Acta* **27**, 216 (1954).
- [12] D. ABOAV, *Schlussbericht über Perjodate*, ETH 1957 (unveröffentlicht).
- [13] P. BAERTSCHI, *Helv. phys. Acta* **18**, 267 (1945).
- [14] C. G. MONTGOMERY, *Technique of Microwave Measurements* (R.L.S. 11) (McGraw-Hill, New York 1947).
- [15] J. LE BOT, Thèse (Rennes, Nov. 1954).
- [16] J. LE BOT und S. LE MONTAGNER, *C. R. Acad. Sci. (Paris)* **236**, 469 und 593 (1953).
- [17] J. LE BOT, *Ann. Phys.* **1**, 463 (1956).
- [18] S. LE MONTAGNER, Thèse (Rennes, Mai 1957).
- [19] G. BIRNBAUM und J. FRANEAU, *J. appl. Phys.* **20**, 817 (1949).
- [20] G. BUSCH, W. KÄNZIG und W. M. MEIER, *Helv. phys. Acta* **26**, 385 (1953).
- [21] N. MARCUVITZ, *Waveguide Handbook* (R. L. S. 10) (McGraw-Hill, New York 1951).
- [22] S. A. SCHELKUNOFF, *Electromagnetic Waves* (Nostrand, New York 1943).
- [23] S. A. SCHELKUNOFF, *Quart. appl. Math.* **11**, 1 (1944).
- [24] D. R. HAMILTON, J. K. KNIPP und J. B. H. KUPER, *Klystrons and Microwave Triodes* (R. L. S. 7) (McGraw-Hill, New York 1948).
- [25] G. L. RAGAN, *Microwave Transmission Circuits* (R. L. S. 9) (McGraw-Hill, New York 1948).
- [26] H. C. TORREY und C. A. WHITMER, *Crystal Rectifiers* (R. L. S. 15) (McGraw-Hill, New York 1948).
- [27] R. PEPINSKY, *Rev. sci. Instr.* **24**, 403 (1953).
- [28] W. H. WATSON, *Physical Principles of Waveguide Transmission and Antenna Systems* (Clarendon Press, Oxford 1947).
- [29] S. LE MONTAGNER, J. LE BOT S. CHAUVIN und R. HAYE, *C. R. Acad. Sci. (Paris)* **239**, 1474 (1954).
- [30] H. FRÖHLICH, *Theory of Dielectrics* (Clarendon Press, Oxford 1949).
- [31] D. ABOAV, H. GRÄNICHER und W. PETTER, *Helv. phys. Acta* **28**, 299 (1955).

### Summary

The complex permittivity can be measured in the region of centimeter-waves by inserting a cylindrical rod of the specimen across a short-circuited rectangular waveguide in the maximum of the  $\vec{E}$ -field. The resulting change in line-impedance is measured with a slotted line. This rod method [16–18] was modified and tested with materials of known dielectric properties (Teflon, Polythene, Plexiglas and water). The conditions for best performance with specimens of high dielectric constants were established. Measurements were made at room temperature with single-crystals of  $\text{NH}_4\text{H}_2\text{PO}_4$  and  $\text{KH}_2\text{PO}_4$  parallel to the  $a$  and  $c$  axis.

The permittivity  $\epsilon_a$  of diammonium-orthoperiodate  $(\text{NH}_4)_2\text{H}_3\text{JIO}_6$  was studied in the temperature range of  $+20^\circ$  to  $-70^\circ\text{C}$ . In the unpolarized and in the antiferroelectric phase the real part of the dielectric constant at 8740 Mc/s is less than half the static value. The results indicate that in ammonium periodate the dispersion frequency of  $\epsilon'_a$  is in the range of  $10^4$  Mc/s and that the relaxation time increases with rising temperature above the transition point. This behaviour represents the contrary of what is found with ferroelectrics.

(Eingegangen: 4. April 1957.)

# Discrete Approximations to the Laplace Transformation<sup>1)</sup>

By WOLFGANG WASOW, Madison, Wis.<sup>2)</sup>

## 1. Introduction

The form and the substance of finite difference methods depend in an essential manner on the continuous analogue that motivates them. For electrical engineers the Laplace transformation is the most familiar tool for the solution of differential and difference-differential equations. It is therefore a natural step for them to introduce the sum

$$h \sum_{n=0}^{\infty} f(nh) e^{-snh}$$

as a discrete analogue to the Laplace transformation

$$\mathfrak{L} f = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt \quad (1.1)$$

of the function  $f(t)$ . The computational techniques based on the Laplace transformation suggest then approximation methods employing its discrete counterpart. It is more common to introduce a new variable

$$z = e^{sh} \quad (1.2)$$

and to drop the factor  $h$ . The resulting operation, defined by

$$\mathfrak{Z} f = \sum_{n=0}^{\infty} f(nh) z^{-n} \quad (1.3)$$

is frequently called the  $z$ -transformation of  $f$ . We shall affix the subscript  $s$  to  $\mathfrak{Z}$ , whenever  $z$  is replaced by  $s$ , so that

$$h \mathfrak{Z}_s f = h \sum_{n=0}^{\infty} f(nh) e^{-snh} \quad (1.4)$$

is the Riemann sum corresponding to  $\mathfrak{L} f$ .

The function  $\mathfrak{Z} f$  is the generating function for the sequence  $f(nh)$ ,  $n=0,1,\dots$  which results from the discretization of  $f(t)$ . Mathematically there may not be

<sup>1)</sup> This paper represents research supported in part by the Office of Naval Research and in part by the Mathematics Research Center, US Army, Contract No. DA-11-022-ORD-2059.

<sup>2)</sup> Mathematics Research Center, US Army.

much difference between dealing with  $\mathcal{Z}f$  or dealing directly with the sequence  $[f(0), f(h), \dots]$ . But the two viewpoints suggest the invention of different computational schemes. For instance, M. CUÉNOD [1]<sup>3)</sup> and R. BOXER and S. THALER [2] have each proposed algorithms for the approximate solution of differential equations by such finite difference schemes. The former author operates directly with the sequence  $f(nh)$  while the authors of [2] are motivated by the theory of Laplace transformation. The resulting finite difference methods have the same accuracy, as far as the order of magnitude of the error is concerned. However, the numerical answers as well as the computational steps of the respective methods differ in a non-trivial way.

The papers quoted do not attempt a general mathematical error analysis. The purpose of the present investigation is to provide such an analysis for some of the techniques based on the  $z$ -transformation.

## 2. Elementary Properties of the $z$ -Transformation

The discussion will be limited throughout to functions  $f(t)$  that are entire and of exponential type. This means that  $f(t)$  is a holomorphic (i. e., regular analytic) function of  $t$  in the whole finite complex  $t$ -plane and that an inequality of the form

$$|f(t)| \leq C e^{\kappa|t|}, \quad (2.1)$$

where  $C$  and  $\kappa$  are constants, holds everywhere. While it is possible to extend many of the arguments below to wider classes of functions these generalizations do not greatly increase the usefulness of the results to the usual applications.

With these assumptions on  $f(t)$  the series in (1.3) is dominated by the series

$$\sum_{n=0}^{\infty} C e^{\kappa nh} z^{-n},$$

and it follows by the ratio test for infinite series that (1.1) converges for

$$z > e^{\kappa h} = z_0. \quad (2.2)$$

The  $z$ -transform is obviously a linear operation, i. e.,  $f(t) = c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)$  implies  $\mathcal{Z}f = c_1 \mathcal{Z}f_1 + c_2 \mathcal{Z}f_2$ . This property is frequently exploited by applying the  $z$ -transformation termwise to a series expansion of the function in question. Thus, if

$$f(t) = \sum_{r=1}^{\infty} a_r \frac{t^{r-1}}{(r-1)!} \quad (2.3)$$

<sup>3)</sup> Numbers in brackets refer to References, page 417.

with

$$a_r = \left[ \frac{d^{r-1}}{dt^{r-1}} f(t) \right]_{t=0} \quad (2.4)$$

one would write

$$3f = \sum_{r=1}^{\infty} a_r 3 \frac{t^{r-1}}{(r-1)!}. \quad (2.5)$$

Since  $f(t)$  is an entire function the series in (2.3) converges for all  $t$ . Nevertheless, the relation (2.5) requires a proof, since a sum of infinitely many terms is involved. In order to prove (2.5) observe first that  $3f$ , as defined in (1.3), is, for  $|z| \geq z_0 + \delta$ ,  $|h| \leq h_0$  ( $\delta > 0$ ,  $h_0 > 0$ , arbitrary), a uniformly convergent series of holomorphic functions of  $h$  and is therefore itself a holomorphic function of  $h$ . Hence, it possesses a convergent series expansion in powers of  $h$ . The coefficient of  $h^{r-1}$  in this series is

$$\frac{1}{(r-1)!} \left[ \frac{d^{r-1}}{dh^{r-1}} \sum_{n=0}^{\infty} f(nh) z^{-n} \right]_{h=0} = \frac{1}{(r-1)!} \sum_{n=0}^{\infty} n^{r-1} \left[ \frac{d^{r-1}}{d(nh)^{r-1}} f(nh) \right]_{h=0} z^{-n} \quad (2.6)$$

provided the series

$$\frac{1}{(r-1)!} \sum_{n=0}^{\infty} n^{r-1} f^{(r-1)}(nh) z^{-n}$$

converges uniformly. This it does, since the differentiation of a uniformly convergent series of analytic functions may be performed termwise. By virtue of (2.4) the second member of (2.6) equals

$$\frac{1}{(r-1)!} a_r \sum_{n=0}^{\infty} n^{r-1} z^{-n},$$

hence,

$$\begin{aligned} 3f &= \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{(r-1)!} a_r \sum_{n=0}^{\infty} n^{r-1} z^{-n} h^{r-1} = \sum_{r=1}^{\infty} a_r \frac{1}{(r-1)!} \sum_{n=0}^{\infty} (nh)^{r-1} z^{-n} \\ &= \sum_{r=1}^{\infty} a_r 3 \frac{t^{r-1}}{(r-1)!}, \end{aligned}$$

which proves (2.5).

The expressions for  $3t^{r-1}/(r-1)!$  in closed form occur frequently in the applications. They will therefore be derived here. Let  $R_p(z)$  be defined as the function with the power series expansion

$$R_p(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n^p z^{-n}, \quad (2.7)$$

then

$$3 \frac{t^{r-1}}{(r-1)!} = \frac{h^{r-1}}{(r-1)!} R_{r-1}(z). \quad (2.8)$$

The series in (2.7) converges for  $|z| > 1$ . The functions  $R_p(z)$  can be written as finite sums with the help of the so-called 'Stirling numbers of the second kind'  $S_p^k$ . (Several tables of these positive integers are available. See [3], page 168, footnote, and page 170.) One has, in fact,

$$R_0(z) = \frac{z}{z-1}, \quad (2.9)$$

$$R_p(z) = \sum_{k=1}^p k! S_p^k \frac{z}{(z-1)^{k+1}}. \quad (2.10)$$

The identity (2.9) is obvious. The proof of (2.10) is based on the identity

$$n^p = S_p^1 n + S_p^2 n(n-1) + \dots + S_p^p n(n-1) \dots (n-p+1) \quad (p=1, 2, \dots) \quad (2.11)$$

(see [3], page 168). It follows from (2.11) that, for  $|z| > 1$  and  $p > 0$ ,

$$\begin{aligned} R_p(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} n^p z^{-n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \{ S_p^1 n + S_p^2 n(n-1) + \dots + S_p^p n(n-1) \dots (n-p+1) \} z^{-n} \\ &= S_p^1 z^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} n z^{-n+1} + S_p^2 z^{-2} \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) z^{-n+2} \\ &\quad + \dots + S_p^p z^{-p} \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) \dots (n-p+1) z^{-n+p} \\ &= \sum_{k=1}^p S_p^k z^{-k} \frac{d^k}{d(z^{-1})^k} \cdot \frac{1}{1-z^{-1}} = \sum_{k=1}^p S_p^k k! \frac{z^{-k}}{(1-z^{-1})^{k+1}} \\ &= \sum_{k=1}^p k! S_p^k \frac{z}{(z-1)^{k+1}}. \end{aligned}$$

An alternate form of (2.8), obtained by simple algebraic manipulation, is

$$R_p(z) = \frac{z}{(z-1)^{p+1}} \sum_{\mu=0}^{p-1} T_p^\mu (-z)^\mu \quad (2.12)$$

with

$$T_p^\mu = \sum_{k=1}^{p-\mu} (-1)^{p-k} k! C_\mu^{p-k} S_p^k.$$

If a function  $f(t)$  is given by its power series (2.3) it can, of course, be calculated numerically for any value of  $t$  by means of a suitably long partial sum of the series. An alternate method, which yields the values of  $f(nh)$  for all  $n$  is based on the  $z$ -transformation and is recommended, e. g., in [2]. It can be



expressed in the following rule, which is an immediate consequence of the preceding analysis.

**Rule 1.** *If*

$$f(t) = \sum_{r=1}^{\infty} a_r \frac{t^{r-1}}{(r-1)!},$$

*replace every*

$$\frac{t^{r-1}}{(r-1)!} \quad \text{by} \quad \frac{h^{r-1}}{(r-1)!} R_{r-1}(z)$$

*and expand  $R_{r-1}(z)$ , as given by (2.9) or (2.10), in a series of powers of  $z^{-1}$ . If the resulting double series is re-arranged according to powers of  $z^{-1}$  the coefficient of  $z^{-n}$  is equal to  $f(nh)$ , because of (1.3), (2.5) and (2.8).*

The only error inherent in this numerical procedure is the one caused by the truncation of the infinite series involved.

### 3. The $z$ -Transformation and the Laplace Transformation

In view of formulas (1.1) and (1.4) the expression (1.4) can be expected to approximate the Laplace transform  $\mathfrak{L}f$ . The difference between the two transforms can be expressed by means of the Euler-Maclaurin formula, a pertinent form of which is given in [4], page 50. With the notation of the present paper that formula becomes

$$\mathfrak{L}f - h \mathfrak{Z}_s f = \sum_{v=1}^m \frac{h^v}{v!} B_v \left[ \frac{d^{v-1}}{dt^{v-1}} [f(t) e^{-st}] \right]_{t=0} + R_m \quad (3.1)$$

where the remainder  $R_m$  is

$$R_m = \frac{h^{m+1}}{m!} \int_0^{\infty} \bar{B}_m(-t) \left[ \frac{d^m}{dx^m} [f(x) e^{-sx}] \right]_{x=th} dt. \quad (3.2)$$

Here  $m$  is an arbitrary positive integer,  $B_v$  is the  $v$ -th Bernoulli number, and  $\bar{B}_m(z)$  is the periodic function with period unity that coincides in the interval  $0 \leq z < 1$  with the  $m$ -th Bernoulli polynomial. Since the definition of BERNOULLI's polynomials and numbers that are found in the literature are not always equivalent, it must be emphasized that the one meant here is that given in [4], page 19. It is easy to verify that the derivation of (3.1) and (3.2) given in [4], pages 49-50, is valid under the assumption (2.1), provided  $s > \kappa$ .

The remainder term  $R_m$  is of the order of magnitude  $O(h^{m+1})$ . More precisely, there exists for every interval  $\kappa + \delta \leq s \leq s_1 < \infty$ ,  $\delta > 0$ , a constant  $C_m$ , independent of  $s$  and  $h$ , such that

$$|R_m| \leq C_m h^{m+1} \quad (\kappa + \delta \leq s \leq s_1, \quad 0 < h \leq h_1). \quad (3.3)$$

In order to prove (3.3) set  $\tau = h t$  in (3.2). It then takes on the form

$$R_m = \frac{h^m}{m!} \int_0^\infty \bar{B}_m\left(-\frac{\tau}{h}\right) \chi(\tau, s) e^{-s\tau} d\tau,$$

where  $\chi(\tau, s)$  is a polynomial of degree  $m$  in  $s$  whose coefficients are linear in the  $m$  first derivatives of  $f(t)$ . The latter satisfy inequalities of the form (2.1), possibly with larger constants  $C$ . Hence,

$$|R_m| \leq h^m M \sum_{\nu=0}^m s^\nu \int_0^\infty e^{(\kappa-s)\tau} d\tau \quad (M = \text{const}),$$

and the last integral converges for  $s > \kappa$ . Thus,  $|R_m| \leq C_m^* h^m$ , where  $C_m^*$  is a constant, for  $\kappa + \delta \leq s \leq s_1 < \infty$ . However, since (3.1) and (3.2) are valid for all  $m$ ,

$$R_m = \frac{h^{m+1}}{(m+1)!} B_m \left[ \frac{d^m}{dt^m} [f(t) e^{-st}] \right]_{t=0} + R_{m+1},$$

which proves the stronger inequality (3.3).

A first conclusion that can be drawn from (3.1), (3.2) and (3.3) is that  $\mathfrak{L}f - h \mathfrak{Z}_s f$  is of the order of magnitude  $O(h)$ . More precisely, there exists a positive number  $A$  such that

$$|\mathfrak{L}f - h \mathfrak{Z}_s f| \leq A h \quad (\kappa + \delta \leq s \leq s_1, \quad 0 < h \leq h_1). \quad (3.4)$$

Formula (3.1) suggests a refinement of the  $z$ -transformation. If  $\mathfrak{Z}^* f$  is defined by

$$\mathfrak{Z}^* f = \mathfrak{Z}f - \frac{1}{2} f(0), \quad (3.5)$$

then (3.1), (3.2), (3.3) and the fact that  $B_1 = -1/2$  show that

$$|\mathfrak{L}f - h \mathfrak{Z}_s^* f| \leq A^* h^2. \quad (3.6)$$

This transformation amounts to approximating the Laplace transformation by means of the trapezoidal rule.

BOXER and THALER [2] propose a different modification, which can also be motivated by means of formulas (3.1) and (3.2). They define the transformation  $\mathfrak{Z}^{**} f$  for  $f = t^{r-1}/(r-1)!$  by

$$\mathfrak{Z}^{**} \frac{t^{r-1}}{(r-1)!} = \mathfrak{Z} \frac{t^{r-1}}{(r-1)!} + h^{r-1} \frac{B_r}{r!}. \quad (3.7)$$

The equations (3.1), (3.2) and (3.3) show then that

$$\left| \mathfrak{L} \frac{t^{r-1}}{(r-1)!} - h \mathfrak{Z}_s^{**} \frac{t^{r-1}}{(r-1)!} \right| \leq A_r h^{r+1} \quad (\kappa + \delta \leq s \leq s_1), \quad (3.8)$$

where  $A_r$  is a constant. Hence  $\mathfrak{Z}^{**}$  leads to a still better approximation to the Laplace transformation for these special functions, provided  $r > 1$ .

The extension of the definition of  $\mathfrak{Z}^{**}$  to general  $f(t)$  of exponential type meets with the difficulty that the series

$$\sum_{r=1}^{\infty} a_r \mathfrak{Z}^{**} \frac{t^{r-1}}{(r-1)!}, \quad (3.9)$$

which seems to be the natural way of defining  $\mathfrak{Z}^{**} f$ , is in general divergent. In a purely formal way one finds that

$$\sum_{r=1}^{\infty} a_r \mathfrak{Z}^{**} \frac{t^{r-1}}{(r-1)!} = \sum_{r=1}^{\infty} a_r \mathfrak{Z} \frac{t^{r-1}}{(r-1)!} + \sum_{r=1}^{\infty} a_r \frac{B_r}{r!} h^{r-1}. \quad (3.10)$$

The first series in the right member converges and represents  $\mathfrak{Z} f$ , by formula (2.5), but the second series is generally divergent (cf. [4], chapter 3, § 6).

In order to arrive nevertheless at a definition of  $\mathfrak{Z}^{**} f$  one may take recourse to the theory of asymptotic series. A power series

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} c_{\mu} x^{\mu},$$

not necessarily convergent, is called an asymptotic representation of a function  $\varphi(x)$ , in symbols

$$\varphi(x) \sim \sum_{\mu=0}^{\infty} c_{\mu} x^{\mu} \quad \text{for } x \rightarrow +0,$$

if

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^{-m} \left[ \varphi(x) - \sum_{\mu=0}^m c_{\mu} x^{\mu} \right] = 0, \quad x > 0,$$

for all non-negative integers  $m$ . An important theorem in the theory of asymptotic series [5] says that corresponding to any power series – convergent or not – there exists a function  $\varphi(x)$ , holomorphic for  $0 < x \leq x_0$ , of which it is an asymptotic expansion. The function  $\varphi(x)$  is not uniquely determined, in fact it can be chosen in infinitely many ways, but all these functions differ by quantities that are asymptotic to zero, i.e., by functions that are of order  $O(x^m)$  for arbitrarily large  $m$ . Now let  $\gamma(f, h)$  be an otherwise unspecified holomorphic function of  $h$  such that

$$\gamma(f, h) \sim \sum_{r=1}^{\infty} a_r \frac{B_r}{r!} h^{r-1} \quad (h \rightarrow +0) \quad (3.11)$$

and define  $\mathfrak{Z}^{**} f$  by

$$\mathfrak{Z}^{**} f = \mathfrak{Z} f + \gamma(f, h), \quad (3.12)$$

then (3.10) shows that

$$\mathfrak{Z}^{**} f \sim \sum_{r=1}^{\infty} a_r \mathfrak{Z}^{**} \frac{t^{r-1}}{(r-1)!} \quad (h \rightarrow +0). \quad (3.13)$$

(Observe that the series in the right member is a power series in  $h$ .)

Unless  $f(0)$  happens to be zero,  $\mathfrak{Z}^{**} f$  leads to an approximation of the Laplace transformation that is no better, as far as the order of magnitude is concerned, than  $\mathfrak{Z}^* f$ . The former transformation is mentioned here, because it is used in [2]. Whether it leads to better numerical results than  $\mathfrak{Z}^*$  in the applications made in [2] remains to be investigated.

#### 4. Approximate Solution of Linear Differential Equations with Constant Coefficients

An ordinary initial value problem for an ordinary linear differential equation with constant coefficients and with a nonhomogeneous term  $\psi(t)$  that is entire and of exponential type can be solved, in a well-known way, by means of the Laplace transformation. This method leads to an expression for the Laplace transform  $\mathfrak{L}y$  of the solution  $y$  of the problem which has the form

$$\mathfrak{L} y = \frac{P(s)}{1 + Q(s)}, \quad (4.1)$$

where  $P(s)$  and  $Q(s)$  are holomorphic at  $s = \infty$  and have a zero there. Actually,  $Q(s)$  is a polynomial in  $s^{-1}$ , but this is immaterial here. In order to find  $y$  from (4.1) one may expand the right member into a series in powers of  $s^{-1}$ , say

$$\mathfrak{L} y = \sum_{r=1}^{\infty} c_r s^{-r}, \quad (4.2)$$

from which one finds, by termwise inversion,

$$y = \sum_{r=1}^{\infty} c_r \frac{t^{r-1}}{(r-1)!}. \quad (4.3)$$

This series may be evaluated directly or by means of Rule 1 of Section 2.

An alternate method, based more directly on the theory of the  $z$ -transformation, is sometimes used in electrical engineering. For its description let

$$P(s) = \sum_{r=1}^{\infty} a_r s^{-r}, \quad Q(s) = \sum_{r=1}^{\infty} b_r s^{-r}. \quad (4.4)$$

Then

$$p(t) = \mathfrak{L}^{-1} P(s) = \sum_{r=1}^{\infty} a_r \frac{t^{r-1}}{(r-1)!} \quad (4.5)$$

$$q(t) = \mathfrak{L}^{-1} Q(s) = \sum_{r=1}^{\infty} b_r \frac{t^{r-1}}{(r-1)!}. \quad (4.6)$$

The functions  $p(t)$ ,  $q(t)$  are of exponential type (cf. [6], page 62). Formula (4.1) can be written

$$\mathfrak{L} y = \frac{\mathfrak{L} p}{1 + \mathfrak{L} q}. \quad (4.7)$$

In view of the inequality (3.4) the right member of (4.7) can be approximated by

$$\frac{h \mathfrak{L}_s p}{1 + h \mathfrak{L}_s q}. \quad (4.8)$$

This is an analytic function of  $e^{-sh} \cdot z^{-1}$ , which can be expanded, by long division, into a power series in  $e^{-sh}$ , say

$$\frac{h \mathfrak{L}_s p}{1 + h \mathfrak{L}_s q} = h \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{y}_n e^{-snh}. \quad (4.9)$$

Since the expression (4.8) is an approximation to  $\mathfrak{L} y$ , it is plausible that  $\tilde{y}_n$  is approximately equal to  $y(nh)$ . Because of the inequality (3.6) and the analogous inequality for  $\mathfrak{L}_s^{**}$  one may expect that the same procedure carried out with  $\mathfrak{L}_s^*$  or  $\mathfrak{L}_s^{**}$  will lead to still better approximations. If this plausibility consideration is valid one has the following rule for the approximate calculation of  $y$  from (4.1).

**Rule 2.** Expand  $P(s)$  and  $Q(s)$  in (4.1) in powers of  $s^{-1}$ . Replace every  $s^{-r}$  by

$$\frac{h^r}{(r-1)!} R_{r-1}(z),$$

divide by  $h$  and expand the resulting function of  $z$  in powers of  $z^{-1}$ . Then the coefficient of  $z^{-n}$  is approximately equal to  $y(nh)$ . Still better approximations are obtained if  $s^{-1}$  is replaced by

$$h R_0(z) - \frac{h}{2},$$

or if every  $s^{-r}$  is replaced by

$$\frac{h^r}{(r-1)!} R_{r-1}(z) - h^r \frac{B_r}{r!}.$$

The second variant of this rule corresponds to the use of the operator  $\mathfrak{L}_s^*$ , the third to that of  $\mathfrak{L}_s^{**}$ .

A proof of the validity of Rule 2 will be given here for the version based on the operator  $\mathfrak{L}_s^*$ . The proof for the ordinary  $z$ -transformation is analogous but simpler. The reasoning does not follow the preceding heuristic argument, but employs directly the fact that

$$\mathfrak{L}_s^* p = \frac{p_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} p_n z^{-n}, \quad \mathfrak{L}_s^* q = \frac{q_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} q_n z^{-n}, \quad (4.10)$$

where  $p_n = p(nh)$ ,  $q_n = q(nh)$ .



Let

$$\frac{3^* p}{1 + h 3^* q} = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{y}_n z^{-n}. \quad (4.11)$$

Inserting the series (4.10) into (4.11) and multiplying by the denominator one obtains, after an interchange of summations,

$$\frac{1}{2} p_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \dot{p}_n z^{-n} = \left(1 + \frac{1}{2} h q_0\right) \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{y}_n z^{-n} + h \sum_{n=1}^{\infty} \left( \sum_{m=0}^{n-1} \tilde{y}_m q_{n-m} \right) z^{-n}.$$

Comparison of like powers of  $z^{-1}$  leads to the recursion formulas

$$\frac{1}{2} \dot{p}_0 = \left(1 + \frac{1}{2} h q_0\right) \tilde{y}_0, \quad (4.12)$$

$$\dot{p}_n = \left(1 + \frac{1}{2} h q_0\right) \tilde{y}_n + h \sum_{m=0}^{n-1} \tilde{y}_m q_{n-m} \quad (n > 0), \quad (4.13)$$

from which the  $\tilde{y}_n$  can be determined successively. If  $\tilde{y}_0$  is eliminated from (4.13) by means of (4.12), the formula (4.13) takes the form

$$\dot{p}_n = \left(1 + \frac{1}{2} h q_0\right) \tilde{y}_n + \left(1 + \frac{1}{2} h q_0\right)^{-1} \frac{1}{2} h q_n \dot{p}_0 + h \sum_{m=1}^{n-1} \tilde{y}_m q_{n-m} \quad (n > 0), \quad (4.14)$$

where the last summation is to be replaced by zero for  $n = 1$ .

In order to compare  $\tilde{y}_n$  with  $y(nh) = y_n$  the equation (4.7) for  $y$  is written in the form  $\mathfrak{L} p = \mathfrak{L} y + \mathfrak{L} y \mathfrak{L} q$ . Taking inverse Laplace transforms and making use of the convolution theorem the integral equation

$$p(t) = y(t) + \int_0^t y(\tau) q(t - \tau) d\tau \quad (4.15)$$

is obtained. Now set  $t = nh$  and replace the last integral by the trapezoidal approximation formula and its remainder term, which is of the form  $h^2 \omega_n$ , where  $\omega_n$  is a function of  $t = nh$  and  $h$  bounded for  $0 \leq h \leq h_1$ ,  $0 \leq t \leq T$  ( $h_1, T$  finite but arbitrary). Then (4.15) becomes

$$\dot{p}_n = y_n + \frac{1}{2} h y_0 q_n + h \sum_{m=1}^{n-1} y_m q_{n-m} + \frac{1}{2} h y_n q_0 + h^2 \omega_n \quad (n > 0). \quad (4.16)$$

For  $n = 0$  formula (4.15) becomes

$$\dot{p}_0 = y_0. \quad (4.17)$$

Eliminating  $y_0$  from (4.16) by means of (4.17) one sees that (4.16) differs from (4.14) by terms of the order  $O(h^2)$ . Hence, if one sets, for abbreviation,

$$\delta_n = \tilde{y}_n - y_n, \quad (4.18)$$

subtraction of (4.16) from (4.14) yields the equations

$$\left(1 + \frac{1}{2} h q_0\right) \delta_n + h \sum_{m=1}^{n-1} \delta_m q_{n-m} = h^2 \tilde{\omega}_n \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (4.19)$$

where  $\tilde{\omega}_n$  has the same properties as  $\omega_n$ .

In order to appraise  $\delta_n$  let

$$A_n = \max_{m \leq n} |\delta_m|, \quad |\tilde{\omega}_n| \leq K \quad (0 \leq h \leq h_1, \quad 0 \leq n h \leq T).$$

Then (4.19) implies

$$\left\{ \left| 1 + \frac{1}{2} h q_0 \right| - h \sum_{m=1}^{n-1} |q_{n-m}| \right\} A_n \leq h^2 K.$$

For sufficiently small values of  $T$  and  $h$  there exists a positive number  $\varepsilon$  independent of  $h$  such that the expression in brackets is not less than  $\varepsilon$ , for  $n \leq T/h$ , because the second term is the Riemann sum of an indefinite integral. Hence, in such an interval

$$|\delta_n| \leq A_n \leq h^2 \frac{K}{\varepsilon}.$$

The last inequality proves that Rule 2, when carried out with the operator  $\mathcal{Z}^*$ , leads to an approximation of order  $O(h^2)$  for  $y(nh)$ ,  $n > 0$  [but not for  $y(0)$ ]. If the  $z$ -transformation itself is used the approximation is  $O(h)$  for all  $n \geq 0$ .

The analysis of Rule 2 when the operator  $\mathcal{Z}^{**}$  is employed can be performed by the same method, but the details are tedious and will be omitted here. It turns out that the result is in general no better than if  $\mathcal{Z}^*$  is used, as far as the order of magnitude of the error is concerned. However, if the first  $k$  ( $k > 0$ ), derivatives of  $p(t)$  and  $q(t)$  vanish at  $t = 0$ , the operator  $\mathcal{Z}^{**}$  *does* lead to a better result. The error is then  $O(h^{2+k})$ . For the proof of this fact the integral in (4.15) must be approximated to the order  $O(h^{k+2})$  by means of the MacLaurin formula. Even in this case, however, it suffices to replace the *first* nonzero terms in the series (4.4) by the corresponding expression  $h \mathcal{Z}^{**} t^r / (r-1)!$  in applying Rule 2. For the later terms  $h \mathcal{Z}^{**} t^r / (r-1)!$  is an adequate substitution, if the error is judged by its order of magnitude.

## 5. More General Differential Equations

BOXER and THALER [2] propose an interesting procedure for the integration of linear differential equations with variable coefficients and for certain nonlinear differential equations. The present section contains a brief discussion of the validity of this part of [2].

The authors of [2] describe their algorithm for differential equations of the form

$$y^{(m)} + \sum_{v=0}^{m-1} g_v y^{(v)} = \psi(t), \quad (5.1)$$

where the  $g_v$  may be any analytic functions of  $t, y, y', \dots, y^{(v-1)}$ . ( $y^{(i)}$  is an abbreviation for  $d^i y/dt^i$ .) The function  $\psi(t)$  must be entire and of exponential type.

It is doubtful that anything is gained by using the operators  $\mathcal{Z}^*$  or  $\mathcal{Z}^{**}$  for such equations, rather than the simple  $z$ -transformation, since the procedure contains other approximate steps which are of order  $O(h)$ , unless a considerable amount of additional labor is expended. The arguments will therefore be carried out for the  $z$ -transformation only. Furthermore, the discussion will be limited to the special case

$$y'' + \varphi y = \psi(t), \quad \varphi = \varphi(t, y, y'), \quad (5.2)$$

in order to simplify the manipulations. The treatment of the more general differential equation (5.1) requires no new ideas.

In order to find an approximation to the solution of (5.2) with the initial values

$$y(0) = \alpha_0, \quad y'(0) = \beta_0, \quad (5.3)$$

BOXER and THALER suggest the following algorithm. Let  $\varphi_0 = \varphi(0, \alpha_0, \beta_0)$ , then the differential equation problem with constant coefficients

$$y_0'' + \varphi_0 y_0 = \psi(t), \quad y_0(0) = \alpha_0, \quad y_0'(0) = \beta_0 \quad (5.4)$$

can be approximately solved by Rule 2 of Section 2. To this end a certain fraction of the form

$$\frac{3 p(t)}{1 + h \varphi_0 \mathcal{Z} t}, \quad (5.5)$$

where  $p(t)$  is an entire function of exponential type, has to be expanded according to powers of  $z^{-1}$ . This expansion is best performed by long division, which yields successively approximate values for the numbers  $y(nh)$ . In order to obtain an approximation to the solution of (5.2) itself BOXER and THALER propose that, after having found  $y_0(0)$  in this manner,  $\varphi_0$  be replaced by  $\varphi(h, y(h), y'(h))$  and that the next step of the division be carried out with the modified denominator. Then one continues the division, replacing  $\varphi$  at every step by  $\varphi(nh, y(nh), y'(nh))$ . Of course,  $y(nh)$  and  $y'(nh)$  are not known. In computational practice the substitution must therefore be performed with the nearest already available approximation to  $y(nh)$  and with some approximation to  $y'(nh)$  based on the previous calculations.

For the mathematical analysis of this method the following two simple facts are needed.

1. Let  $f(t)$  be of exponential type, and let  $f(0) = 0$ . Then

$$z \mathfrak{Z} f(t) = \mathfrak{Z} f(t+h). \quad (5.6)$$

This is proved by the series of equalities

$$z \mathfrak{Z} f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} f(nh) z^{1-n} = \sum_{n=0}^{\infty} f((n+1)h) z^{-n} = \mathfrak{Z} f(t+h).$$

2. A simple application of the convolution theorem shows that

$$s^{-2} \mathfrak{L} \psi(t) = \mathfrak{L} \int_0^t (t-\tau) \psi(\tau) d\tau. \quad (5.7)$$

Application of Laplace transformation to the problem (5.4) yields

$$\mathfrak{L} y_0 = \frac{\mathfrak{L} p(t)}{1 + \varphi_0 \mathfrak{L} t}$$

where

$$\mathfrak{L} p = s^{-2} \mathfrak{L} \psi + \beta_0 s^{-2} + \alpha_0 s^{-1} = \mathfrak{L} \left\{ \int_0^t (t-\tau) \psi(\tau) d\tau + \beta_0 t + \alpha_0 \right\}.$$

Let

$$\chi_0(z^{-1}) = \mathfrak{Z} p = \mathfrak{Z} \left\{ \int_0^t (t-\tau) \psi(\tau) d\tau + \beta_0 t + \alpha_0 \right\}. \quad (5.8)$$

The result of the first step of the long division of (5.5) is a relation of the form

$$\frac{\chi_0(z^{-1})}{1 + h \varphi_0 \mathfrak{Z} t} = \chi_0(0) + z^{-1} \frac{\chi_1(z^{-1})}{1 + h \varphi_0 \mathfrak{Z} t}, \quad (5.9)$$

which can be regarded as the definition of the analytic function  $\chi_1(z^{-1})$ . Since  $p(0) = \alpha_0$  by (5.8), it follows from the definition of the  $z$ -transformation that

$$\chi_0(0) = \alpha_0.$$

Hence, (5.9) and (5.8) lead to

$$\chi_1(z^{-1}) = z \mathfrak{Z} \left\{ \int_0^t (t-\tau) \psi(\tau) d\tau + \beta_0 t \right\} + \mathfrak{Z} \alpha_0 - z \alpha_0 h \varphi_0 \mathfrak{Z} t.$$

Application of (5.6) changes this into

$$\left. \begin{aligned} \chi_1(z^{-1}) &= 3 \left\{ \int_{-h}^t (t-\tau) \psi(\tau+h) d\tau + \beta_0(t+h) + \alpha_0 - \alpha_0 h \varphi_0(t+h) \right\} \\ &= 3 \left\{ \int_0^t (t-\tau) \psi(\tau+h) d\tau + \beta_1 t + \alpha_1 \right\}, \end{aligned} \right\} \quad (5.10)$$

where

$$\alpha_1 = \alpha_0 + \beta_0 h - \alpha_0 \varphi_0 h^2 - \int_{-h}^0 \tau \psi(\tau+h) d\tau \quad (5.11)$$

$$\beta_1 = \beta_0 - \alpha_0 \varphi_0 h + \int_{-h}^0 \psi(\tau+h) d\tau. \quad (5.12)$$

Let now  $\varphi_n$  be some numbers such that, for all  $n$  in the interval  $0 \leq n h \leq T$  under consideration

$$|\varphi_n - \varphi(nh, y(nh), y'(nh))| \leq Kh \quad (K = \text{const}). \quad (5.13)$$

If  $y(0), y(h), \dots, y(n-1)h$  are already known to within an accuracy of order  $h$ , such a number  $\varphi_n$  can always be found. This point will be discussed more fully below.

The fraction

$$\frac{\chi_1(z^{-1})}{1 + h_1 \varphi_3 t}$$

is the basis of the second step in the long division. It is a power series in  $z^{-1}$  whose leading term is  $\alpha_1$ . It will now be shown that  $\alpha_1$  is an approximation to  $y(h)$ , and that the repetition of the divisions leads to a sequence of numbers  $\alpha_n$  which approximates  $y(nh)$ . The precise statement to be proved is as follows.

**Theorem.** Set  $\varphi_0 = \varphi(0, \alpha_0, \beta_0)$  and assume that the  $\varphi_n, n > 0$ , satisfy (5.13). With  $\chi_0(z^{-1})$  given by (5.8) let the functions  $\chi_n(z^{-1})$  be defined recursively by

$$\frac{\chi_n(z^{-1})}{1 + h \varphi_n 3 t} = \chi_n(0) + z^{-1} \frac{\chi_{n+1}(z^{-1})}{1 + h \varphi_{n+1} 3 t}. \quad (5.14)$$

Then there exist constants  $T, h_1, M$ , independent of  $h$  and  $n$  but dependent on  $\varphi, \psi, K$  such that

$$|\chi_n(0) - y(nh)| \leq Mh \quad (0 \leq nh \leq T, 0 \leq h \leq h_1), \quad (5.15)$$

where  $y(t)$  is the solution of (5.2), (5.3).



*Proof:* The proof consists in showing inductively that

$$\chi_n(z^{-1}) = 3 \left\{ \int_0^t (t - \tau) \psi(\tau + n h) d\tau + \beta_n t + \alpha_n \right\}, \quad (5.16)$$

where  $\alpha_n = \chi_n(0)$  and  $\beta_n$  is a certain constant [cf. (5.19)] such that

$$\lambda_n \equiv |\alpha_n - y(n h)| + |\beta_n - y'(n h)| \leq N n h^2 \quad (N = \text{const}, \quad 0 \leq n h \leq T). \quad (5.17)$$

For  $n = 0$ , the relation (5.16) has already been proved and (5.17) is obvious. Assume that these relations are true for  $n = k$ . By (5.14)

$$\chi_{k+1}(z^{-1}) = z \chi_k(z^{-1}) - z \alpha_k - z \alpha_k \varphi_k h 3 t.$$

If  $\chi_k(z^{-1})$  is replaced by the right member of (5.16) with  $n = k$ , a calculation analogous to that in the step from  $n = 0$  to  $n = 1$  in (5.10) leads to

$$\chi_{k+1}(z^{-1}) = 3 \left\{ \int_0^t (t - \tau) \psi(\tau + (k+1) h) d\tau + \beta_{k+1} t + \alpha_{k+1} \right\}, \quad (5.18)$$

where

$$\alpha_{k+1} = \alpha_k + \beta_k h - \alpha_k \varphi_k h^2 - \int_{-h}^0 \tau \psi(\tau + (k+1) h) d\tau, \quad (5.19)$$

$$\beta_{k+1} = \beta_k - \alpha_k \varphi_k h + \int_{-h}^0 \psi(\tau + (k+1) h) d\tau, \quad (5.20)$$

in generalization of (5.11) and (5.12). Equation (5.18) proves (5.16) for  $n = k + 1$ .

In order to show that (5.17) is true for  $n = k + 1$ , i. e., that  $\alpha_{k+1}$ ,  $\beta_{k+1}$  are approximation to  $y_{k+1} = y((k+1) h)$  and  $y'_{k+1} = y'((k+1) h)$ , respectively, the given differential equation (5.2) for  $y$  must be used. One has, by TAYLOR's formula,

$$y_{k+1} = y_k + h y'_k + h^2 \mu_k \quad (k+1) h \leq T, \quad (5.21)$$

with

$$|\mu_k| \leq \frac{1}{2} \max_{0 \leq t \leq T} |y'(t)|, \quad (5.22)$$

and from (5.2),

$$\left. \begin{aligned} y'_{k+1} &= y'_k - \int_{kh}^{(k+1)h} \varphi(t, y(t), y'(t)) y(t) dt + \int_{kh}^{(k+1)h} \psi(t) dt \\ &= y'_k - h y_k \varphi(k h, y_k, y'_k) + \int_{-h}^0 \psi(t + (k+1) h) dt + h^2 \nu_k \end{aligned} \right\} \quad (5.23)$$

with

$$|v_k| \leq \max_{0 \leq t \leq T} \left| \frac{d}{dt} [y(t) \varphi(t, y(t), y'(t))] \right|. \quad (5.24)$$

Thanks to assumption (5.13) the relation (5.23) can be written

$$y'_{k+1} = y'_k - h y_k \varphi_k + \int_{-h}^0 \psi(\tau + (k+1)h) d\tau + h^2 v_k^*, \quad (5.25)$$

where  $v_k^*$  is uniformly bounded for  $k+1 \leq T/h$ .

Now subtract (5.21) from (5.19) and (5.25) from (5.20), form the absolute values of the two members in each of the two resulting equations and add them. By virtue of (5.13) the quantities  $|\varphi_n|$  are bounded for  $n \leq T/h$ , the bound depending on  $\varphi, \psi, K$  and  $T$  only. Furthermore,

$$|\alpha_k| \leq N k h^2 + \max_{0 \leq t \leq T} |y(t)|,$$

because of the assumed truth of (5.17) for  $n = k$ . In consequence of these two facts, of the inequality (5.22) and of the boundedness of  $v_k^*$  there results, after a short calculation, the inequality

$$\lambda_{k+1} \leq \lambda_k + A \lambda_k h + B N k h^4 + C h^2, \quad (5.26)$$

in which  $A, B$  and  $C$  are positive constants independent of  $N, k$  and  $h$ . They may depend on  $T$  but they need not be increased, if  $T$  is decreased. The inductive assumption that (5.17) is valid for  $n = k$  shows that (5.26) implies its validity for  $n = k+1$  provided

$$A N k h^3 + B N k h^4 + C h^2 \leq N h^2.$$

Since  $kh < T$ , the last inequality is certainly satisfied, if

$$A N T + B N T h + C \leq N.$$

This will be the case if  $N$  and  $T$  are chosen so that the inequalities

$$N > C, \quad T \leq \frac{N - C}{(A + B h_1) N}$$

are true. This may require a reduction of the original size of  $T$ , but, as was mentioned before, this can be done without changing  $A, B$  or  $C$ . This completes the induction from  $k$  to  $k+1$  and hence the proof of the theorem.

In the light of the inequality (5.17) it is clear that an acceptable choice of the numbers  $\varphi_n$  is

$$\varphi_n = \varphi(nh, \alpha_n, \beta_n).$$

The numbers  $\beta_n$  could be found successively from (5.20). Since the exact integration involved in the use of this formula may be inconvenient, a sequence

$\beta_n^*$  obtained by approximating the integral by a quadrature formula with an error that is  $O(h^2)$  could be used instead. A still simpler procedure consists in replacing  $y'_n$  in  $\varphi$  by  $(y_{n-1} - y_{n-2})/h$ , which, because of (5.21) and the continuous differentiability of  $y'(t)$ , changes  $\varphi$  by an amount of the order  $O(h)$ .

The proof of the foregoing theorem shows that the method of BOXER and THALER is closely related to the simple stepwise integration procedure in which approximate values  $y_n^*$ ,  $y_n'^*$  for  $y(nh)$  and  $y'(nh)$  are successively calculated from the equations

$$y_{n+1}^* = y_n^* + y_n'^* h, \quad y_{n+1}'^* = y_n'^* - y_n^* \varphi(nh, y_n^*, y_n'^*) h + \psi(nh) h.$$

These approximation formulas can easily be justified and they differ from (5.19), (5.20) by terms of order  $O(h^2)$ . Like the method of [2] they yield, in general, approximations of order  $O(h)$ , and they seem to be at least as simple. It must also be said that numerical solutions with this order of approximation are not considered very accurate in numerical analysis. Several fairly simple methods that yield higher precision are known. However, the order of magnitude of the error term is not the ultimate criterion for the usefulness of a numerical method. Since a finer appraisal of the error is probably very difficult, the question is best decided by numerical experiments.

REFERENCES

[1] M. CUÉNOD, *Méthode de calcul à l'aide de suites* (Lausanne 1955).  
[2] R. BOXER and S. THALER, *A Simplified Method of Solving Linear and Non-linear Systems*, Proc Inst. Radio Engrs. 44, 89-101 (1956).  
[3] CH. JORDAN, *Calculus of Finite Differences* (Budapest 1939).  
[4] N. E. NÖRLUND, *Differenzenrechnung* (Berlin 1924).  
[5] J. F. RITT, *On the Derivatives of a Function at a Point*, Ann. Math. 18, 18-23 (1916).  
[6] G. DOETSCH, *Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation* (Dover Publications, New York 1943).

Zusammenfassung

Einige numerische Anwendungen der Transformation

$$\mathfrak{Z} f = \sum_{n=0}^{\infty} f(nh) z^{-n}$$

einer Funktion  $f(t)$  (sogenannte  $z$ -Transformation) werden in dieser Arbeit auf ihre mathematische Gültigkeit hin untersucht. Es zeigt sich, dass manche dieser Techniken bekannteren Differenzenmethoden sehr ähnlich sind. Die Arbeit bespricht ferner die Beziehung zwischen der Laplace-Transformation und der  $z$ -Transformation sowie zwei verbesserte diskrete Annäherungen zur Laplace-Transformation.

(Received: April 16, 1957.)

## First Integrals of Dynamical Systems

By OENE BOTTEMA, Delft<sup>1)</sup>

1. We consider a mechanical system with  $n$  degrees of freedom and the coordinates  $q_1, q_2, \dots, q_n$ ; it is holonomic, conservative and nongyroscopic; the kinetic energy  $T$  and the potential energy  $V$  do not contain  $t$  explicitly. A set  $S$  of equations of motion is given by the  $n$  Lagrangian equations

$$L_k \equiv \frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} + \frac{\partial V}{\partial q_k} = 0. \quad (1)$$

If one knows  $m \leq n$  mutually independent first integrals of the system

$$F_i(q, \dot{q}) = c_i \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad (2)$$

it is a customary procedure to omit  $m$  equations of (1) and to solve the set  $S'$  of  $n$  equations consisting of (2) and  $L_k = 0$  ( $k = 1, 2, \dots, n - m$ ). The set  $S'$  is considered equivalent to  $S$ .

Obviously the first integrals are consequences of the equations of motion and as such they are without doubt *necessary* conditions. It does not mean, however, that  $S'$  is a set of *sufficient* conditions. A trivial example is the following. In the above case a first integral is given by the energy equation

$$T + V = c. \quad (3)$$

It is well known that it can be derived from (1) by the identity

$$\sum \dot{q}_k L_k = \frac{d}{dt} (T + V),$$

making use of the fact that  $T$  is a homogeneous quadratic function of  $\dot{q}_i$ . If we take the set  $S'$  consisting of  $L_k = 0$  ( $k = 1, \dots, n - 1$ ) and (3), then a solution of it satisfies  $\dot{q}_n L_n = 0$ ; therefore it is not necessarily a solution of (1) in the case  $\dot{q}_n = 0$ .

2. We give a somewhat more complicated example where the assumed equivalency of  $S$  and  $S'$  could easily give rise to an erroneous result.

Consider a double pendulum moving in a fixed plane under no forces. It consists of two homogeneous rods  $AB$  (length  $l_1$ , mass  $m_1$ ) and  $BC$  (length  $l_2$ , mass  $m_2$ ),  $A$  being a fixed point. If we take as coordinates the angles  $\varphi_1$  and  $\varphi_2$  of  $AB$  and  $BC$  with a fixed direction, we have

$$T = \frac{1}{2} A \dot{\varphi}_1^2 + B \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 + \frac{1}{2} C \dot{\varphi}_2^2, \quad (4)$$

where

$$A = \frac{1}{3} (m_1 + 3 m_2) l_1^2, \quad B = \frac{1}{2} m_2 l_1 l_2, \quad C = \frac{1}{3} m_2 l_2^2. \quad (5)$$

<sup>1)</sup> Technische Hogeschool.

For the moment of momentum of the system about  $A$  we have

$$I = A \dot{\varphi}_1 + B \cos(\varphi_1 - \varphi_2) (\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2) + C \dot{\varphi}_2. \quad (6)$$

Hence two first integrals of the system are

$$F_1 \equiv \frac{1}{2} A \dot{\varphi}_1^2 + B \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 + \frac{1}{2} C \dot{\varphi}_2^2 = c_1, \quad (7)$$

$$F_2 \equiv A \dot{\varphi}_1 + B \cos(\varphi_1 - \varphi_2) (\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2) + C \dot{\varphi}_2 = c_2. \quad (8)$$

Obviously  $\varphi_1 = \pi/2 + \omega t$ ,  $\varphi_2 = \omega t$ , where  $\omega$  is a constant, is a solution of the set (7, 8), with  $c_1 = (A + C) \omega^2/2$ ,  $c_2 = (A + C) \omega$ . The conclusion would be that if for  $t = 0$   $AB$  and  $BC$  are at right angles and have equal angular velocity, this situation is maintained during the motion.

It is easily seen that the conclusion is wrong. The *Lagrangian equations* of motion are

$$L_1 \equiv A \ddot{\varphi}_1 + B \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \ddot{\varphi}_2 + B \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \dot{\varphi}_2^2 = 0, \quad (9)$$

$$L_2 \equiv C \ddot{\varphi}_2 + B \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \ddot{\varphi}_1 - B \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \dot{\varphi}_1^2 = 0. \quad (10)$$

Obviously

$$\varphi_1 = \frac{\pi}{2} + \omega t, \quad \varphi_2 = \omega t$$

is *not* a solution of this set. If for  $t = 0$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\pi}{2}, \quad \dot{\varphi}_1 = \dot{\varphi}_2 = \omega,$$

then

$$\ddot{\varphi}_1 = -\frac{B}{A} \omega^2, \quad \ddot{\varphi}_2 = \frac{B}{C} \omega^2.$$

3. From (7) and (8) it follows that

$$G_1 \equiv \left. \begin{aligned} \frac{dF_1}{dt} &= A \varphi_1 \ddot{\varphi}_1 + B \cos(\varphi_1 - \varphi_2) (\dot{\varphi}_1 \ddot{\varphi}_2 + \ddot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2) - B \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \\ &\times (\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 + C \dot{\varphi}_2 \ddot{\varphi}_2 = 0, \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

$$G_2 \equiv \left. \begin{aligned} \frac{dF_2}{dt} &= A \ddot{\varphi}_1 + B \cos(\varphi_1 - \varphi_2) (\ddot{\varphi}_1 + \ddot{\varphi}_2) - B \sin(\varphi_1 - \varphi_2) (\dot{\varphi}_1^2 - \dot{\varphi}_2^2) \\ &+ C \ddot{\varphi}_2 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Obviously we have the following identities

$$G_1 = \dot{\varphi}_1 L_1 + \dot{\varphi}_2 L_2, \quad G_2 = L_1 + L_2.$$

Therefore  $G_1 = 0$  and  $G_2 = 0$  are consequences of  $L_1 = 0$  and  $L_2 = 0$ . On the other hand

$$(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) L_1 = G_1 - \dot{\varphi}_2 G_2, \quad (\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) L_2 = -G_1 + \dot{\varphi}_1 G_2.$$

From  $G_1 = 0$  and  $G_2 = 0$  it follows  $(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) L_1 = (\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) L_2 = 0$ . Hence a solution of the set (7), (8) is not always one of (9), (10), a sufficient subsidiary condition being  $\dot{\varphi}_1 \neq \varphi_2$ .



*Zusammenfassung*

Wenn man eine oder mehrere der Lagrangeschen Gleichungen durch erste Integrale ersetzt, dann sind die neuen Bedingungen zwar notwendig, aber nicht immer hinreichend.

(Received: February 18, 1957.)

---

Varia – Miscellaneous – Divers

---

**9<sup>e</sup> Assemblée du Comité suisse d'optique (CSO.)  
du 22 mai 1957 à Yverdon et Ste-Croix**

Le 22 mai 1957 le Comité suisse d'optique, section photonique, a tenu son assemblée annuelle à Yverdon et Ste-Croix. Au cours de cette séance six communications ont été présentées. Nous donnons ci-après le résumé de ces communications.

**Reziprozitätsfehler bei photographischen Schichten.** Von J. EGGERT, Zürich<sup>1)</sup>.

Nach der Reziprozitätsregel von BUNSEN und ROSCOE soll die photochemische Wirkung nur von der Anzahl absorbierter Quanten, also von dem Produkt  $I t$  aus Bestrahlungsstärke  $I$  und Bestrahlungszeit  $t$ , nicht aber von den Faktoren selbst abhängen. Für die photographische Wirkung trifft diese Regel nur beschränkt zu, wie besonders SCHWARZSCHILD feststellte. Diese Reziprozitätsfehler werden in Zürich mit einem automatisch arbeitenden Gerät für den Bereich von 7 Zehnerpotenzen und für verschiedene Entwicklungsarten ermittelt, um das Verhalten der Entwicklungskeime topographisch und kinetisch zu untersuchen.

**Etudes de certaines propriétés optiques du corps solide.** Par R. MERCIER et B. V. VIRROZ, Lausanne<sup>2)</sup>.

Ces travaux vont prochainement être publiés.

**Zur Physik und Technik des Kalten Spiegels.** Von R. KLÄUI, Balzers<sup>3)</sup>.

Unter Kalten Spiegeln wird eine Anordnung einer Vielzahl von dünnen, interferenzfähigen Schichten verstanden, die das sichtbare Spektrum im wesentlichen reflektiert, während das infrarote ungehindert passieren kann. Der Aufbau erfolgt durch  $(\lambda_0/4 n)$ -Schichten mit möglichst grosser  $n$ -Differenz benachbarter Teilschichten. Infolge höherer Ordnungen treten im Ultraviolett weitere Reflexionsmaxima auf, die aber durch Absorption überlagert sind, während im Sichtbaren und Langwelligen die Schichtsubstanzen absorptionsfrei sein müssen.

Die Absorptionsfreiheit wird nach einem patentierten Verfahren dadurch erreicht, dass während des Aufdampfprozesses eine Autoxydation der zur Verdampfung gelangenden Suboxyde in die am höchsten abgesättigte Sauerstoff-

<sup>1)</sup> Photographisches Institut der ETH.

<sup>2)</sup> EPUL.

<sup>3)</sup> Gerätebauanstalt Balzers.

verbindung erfolgt, indem dem Molekülstrom der zu verdampfenden Substanz ein Sauerstoffstrom mit einem Partialdruck überlagert wird, welcher den  $O_2$ -Dissoziationsdruck der abgesättigten Verbindung kompensiert.

Da die verwendeten Schichtsubstanzen hohe chemische Beständigkeit, Wärmefestigkeit und grosse mechanische Härte besitzen, eignet sich der Kalte Spiegel auch als Oberflächenspiegel, so dass sowohl eine Schlifffläche eingespart wie auch schlieren- und blasenhaltige, wärmebeständige Gläser verwendet werden können. Das Reflexionsvermögen im Sichtbaren ist höher als bei Ag- und Al-Spiegeln. Bei Verwendung Kalter Oberflächenspiegel in Verbindung mit Bogenlampen tritt zudem bei Beschädigung der Oberfläche durch Abbrand nur einfacher Lichtverlust ein, während bei rückseitig belegten Spiegeln infolge des Strahlenganges der Verlust doppelt so gross werden kann. Der von einem Kohlebogen über einen Kalten Spiegel auf ein Vakuum-Thermo-Element abgebildete Krater ergab nur ein Viertel der Thermospannung verglichen mit dem über einen Al- oder Ag-Spiegel abgebildeten Krater.

### Vollkommene Objektive. Von R. STETTLER, Aarau<sup>4</sup>).

Im wesentlichen deckt sich der Inhalt des Referates mit den nachstehend aufgeführten Veröffentlichungen des Referenten:

*Über die optische Abbildung von Flächen und Räumen*, Optik 12, 529–543 (1955).

*Über radialsymmetrische optische Medien*, Optica Acta 3, 101–103 (1956).

### Gesichtspunkte beim Bau eines universellen Spektral-Photometers. Von E. LÜSCHER, Lausanne<sup>5</sup>).

Die Hauptanforderung, die an einen Monochromator gestellt wird, ist die, dass die Strahlungsleistung so wenig wie möglich verringert werden soll. Man wird also den Lichtleitwert<sup>6</sup>) so gross als möglich wählen:

$$L = \Delta\lambda A \frac{l d}{f}.$$

Dabei bedeuten:  $\Delta\lambda$  Bandbreite;  $A$  Auflösungsvermögen;  $l$  Spalthöhe;  $d$  Durchmesser;  $f$  Brennweite des Kollimators.

Da ein möglichst grosser Spektralbereich erwünscht ist, wurden als Kollimatoren sphärische Spiegel anstelle von Linsen verwendet. Die Spiegel sind mit einer aufgedampften Aluminiumschicht versehen, damit auch im UV gearbeitet werden kann, da Silber bei 3600 Å einen steilen Abfall des Reflexionsvermögens<sup>7</sup>) zeigt.

Als Monochromator-Montierung eignet sich die Anordnung nach CZERNY-TURNER<sup>8</sup>) gut, da sowohl mit Prismen als auch mit Reflexionsgitter gearbeitet werden kann. Da eine grosse Spalthöhe ausgenützt wird (25 mm), muss der Sekundärspalt bei Verwendung von Gittern wegen der Krümmung der Spektrallinien bei Prismenmonochromatoren ausgewechselt werden können. WIHL<sup>9</sup>) konnte zeigen, dass bei dieser Montierung Asymmetriefehler (Koma) der sphärischen Spiegel vermieden werden und ferner bei nicht zu grossem Öffnungsverhältnis (bei unserer Montierung 1:5) die sphärische Aberration gegenüber dem Astigmatismus vernachlässigt werden darf.

<sup>4</sup>) Kern AG.

<sup>5</sup>) EPUL und optisches Laboratorium Metrohm.

<sup>6</sup>) G. HANSEN, Optik 1, 227 (1946).

<sup>7</sup>) G. B. SABINE, Phys. Rev. 55, 1064 (1939).

<sup>8</sup>) M. CZERNY und A. F. TURNER, Z. Phys. 61, 792 (1930).

<sup>9</sup>) H. WIHL, Rev. Opt. 33, 425 (1954).

Bei Monochromatoren für das Schumann-Gebiet muss die Anzahl der reflektierenden Flächen wegen dem geringen Reflexionsvermögen aller bisher untersuchten Materialien möglichst klein gehalten werden. Wir wählten deshalb für dieses Gebiet eine Paschen-Runge-Gittermontierung, bei der das Gitter die einzige reflektierende Fläche bildet.

Der grosse Spektralbereich bedingt die Verwendung verschiedener Detektoren, die sukzessive eingeschaltet werden können. Im UV und Sichtbaren eignen sich Photomultiplier am besten. Thermoelemente werden für das IR montiert. Damit die Schwierigkeiten der Nullpunktstabilität vom Gleichstromverstärker vermieden werden, wurde der Lichtstrahl vor dem Eintrittspalt zerhackt und mit einem Wechselstromverstärker gearbeitet. Die Zerhackerfrequenz muss wegen der Trägheit der Thermoelemente niedrig (11 Hz) gewählt werden.

Damit Gaszellen (1,5 m Absorptionslänge), Absorptionsgefässe im Schmelzofen, verwendet werden können, wurde der eigentliche Absorptionsraum möglichst gross ausgebildet. Dies bedingt allerdings eine erneute Kollimation nach dem Messgefäss vor den Empfängern.

Die universelle Verwendung eines Spektralphotometers bedingt auch eine Umschaltung auf verschiedene Lichtquellen (UV-Hg-Lampe, W-Lampe, Nernst-Brenner, Flamme, Lyman-Lampe). Die Anordnung dieser verschiedenen Lichtquellen ist so getroffen, dass diese auf einem Halbkreis mit einem sphärischen Spiegel im Zentrum stehen. Der Hohlspiegel bildet die jeweilige Lichtquelle auf den Eintrittspalt ab.

Eines der Hauptprobleme beim Bau von Spektralphotometern bildet die möglichst weitgehende Unterdrückung von Streulicht. Dies kann nur durch geeignete Anordnung von Blenden erreicht werden. Für nichtmoduliertes Licht ist der Empfänger ohnehin unempfindlich.

### **Ein neuartiges Gerät für die Fernseh-Abtastung von Filmen.** Von TH. STUTZ, Zürich<sup>10</sup>).

Im Auftrage der Schweizerischen PTT baute die Abteilung für industrielle Forschung des Institutes für technische Physik der ETH ein weiteres Modell eines Fernseh-Filmabtasters für 16-mm-Schmalfilm, nachdem der erste Prototyp seit dem Dezember 1953 im Fernsehstudio Bellerive dauernd im Betrieb steht. Es handelt sich um einen Leuchtpunktabtaster mit einer neuartigen Konstruktion zum optischen Ausgleich der Bewegung des mit beliebiger Geschwindigkeit durchlaufenden Filmes.

Grundsätzlich ist in jedem Filmabtaster ein Film-Wiedergabegerät mit einer Einrichtung zur Fernsehaufnahme zusammengebaut. Leider kann man aber von den verschiedenen Möglichkeiten der Filmwiedergabe und der Fernsehaufnahme nicht die einfachsten und bewährtesten kombinieren. Wollte man zum Beispiel mit dem seit frühesten Zeiten beliebten Leuchtpunktabtaster einen auf einem normalen Kinoprojektor vorgeführten Film übertragen, so liesse sich die Dunkel-pause nicht auf den durch die Fernsehnorm vorgeschriebenen Wert von weniger als 2 ms reduzieren.

Eine Betrachtung aller Möglichkeiten zeigt, dass konventionelle Filmprojektoren eine speichernde Fernseheinrichtung oder dann der einfachere Leuchtpunktabtaster einen der heute nicht mehr gebräuchlichen Filmprojektoren ohne Dunkelpause bedingen. Bei diesen nichtintermittierenden Projektoren mit gleichförmig durchlaufendem Film ist es bei einem einfachen Verhältnis der

<sup>10</sup>) Abteilung für industrielle Forschung des Institutes für technische Physik der ETH.

Filmbild- und der Fernseh-Ablenkfrequenz möglich, die Filmbewegung zur Bildzerlegung mitzubenützen. Die einzige Lösung, die gleichzeitig alle Film- und Fernschnormen bewältigt, ist der optische Ausgleich der Filmbewegung. Hier wird das Bild des gleichförmig bewegten Filmes mit optischen Mitteln stillgesetzt, so dass die Fernsehübertragung vom Filmtransport unabhängig ist.

Die konstruktive Verwirklichung von Projektoren ohne Dunkelpause bietet etwas andere Schwierigkeiten als diejenige von intermittierenden. So muss zum Beispiel die Optik dem Abstand zweier aufeinanderfolgender Bilder angepasst werden, und auch die Filmtransporteinrichtung muss den Schrumpfungszustand des Filmes berücksichtigen. Mängel in der Bildfeldausleuchtung oder eventuelle Unschärfen sind besonders unangenehm, weil sie sich gegenüber dem Bildinhalt bewegen.

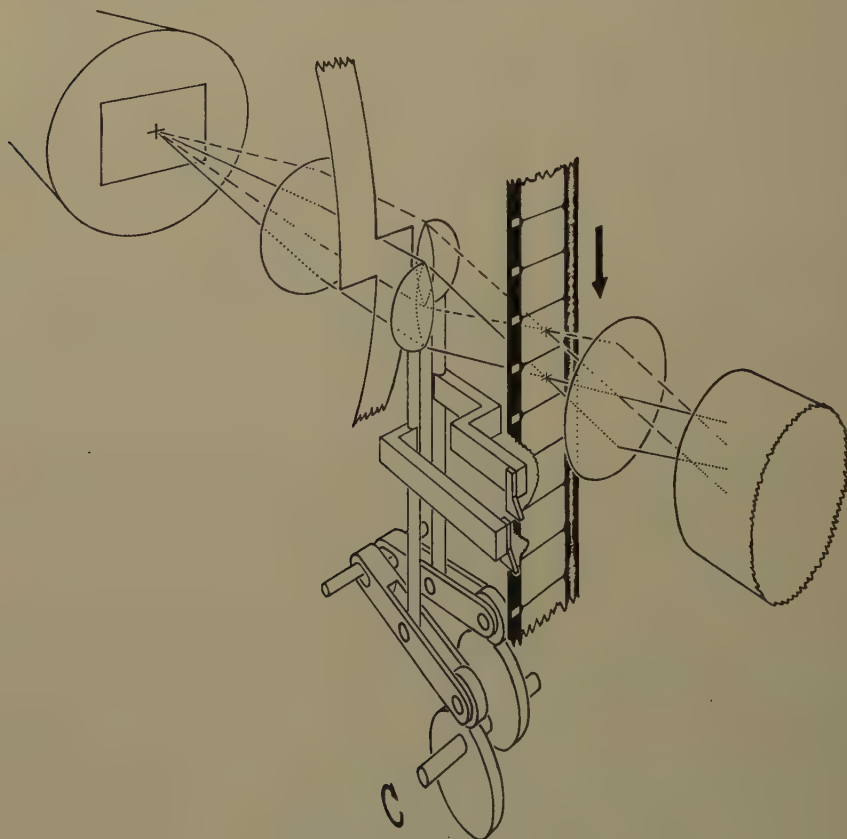
Für das hier zu beschreibende Gerät kam nur ein Leuchtpunktastaster in Frage, da dieser eine besonders hohe Bildschärfe aufweist sowie keine heiklen Einstellungen und beim Farbfernsehen keine Deckungsprobleme kennt. Die Filmwiedergabe geschieht mit optischem Ausgleich der Filmbewegung, weil das Gerät auch imstande sein muss, verschieden normierte Amateurfilme zu übertragen. Damit auch die Filmwiedergabe keine besonderen Ansprüche an die Bedienung stellt, soll die Berücksichtigung der Filmschrumpfung vollautomatisch erfolgen.

Das Prinzip der neuen Lösung ist in Figur 1 dargestellt. Darin sind von links nach rechts abgebildet: der Leuchtschirm einer Kathodenstrahlröhre, eine den Leuchtschirm ins Unendliche abbildende Linse, ein horizontalachsiges Blendenrad, zwei durch eine Vertikalebene getrennte Hälften eines Objektives, die den auf dem Leuchtschirm einen Fernsehraster schreibenden Leuchtpunkt auf je ein Bild des Filmes abbilden, sodann folgt hinter dem Film eine Kondensorlinse, die den gesamten Lichtstrom auf die dahinter folgende Photokathode sammelt. Zwei Greifer sind mit je einer der beiden Objektivhälften starr zusammengebaut, und diese beiden Gebilde sind längs einer Parallelen zur Filmführung beweglich. Zwei Kurvenscheiben bewegen jeweils das eine der beiden Halbobjektive gleichförmig abwärts, während das andere sich etwas rascher vom vorhergehenden zum nächstfolgenden Filmbild aufwärtsbewegt, so dass sich während einer gewissen Zeitspanne, die in Figur 1 festgehalten ist, beide Objektive im Abstand eines Filmbildes mit dem Film bewegen. Während dieser Zeit wird durch das erwähnte Blendenrad die Abbildung vom jeweils unteren auf das obere Halbobjektiv überblendet. Dabei ist das Blendenrad so ausgebildet, dass es von der einen Objektivpupille genau die gleiche Fläche freigibt, wie es von der anderen zudeckt, so dass sich die Helligkeit während der Überblendung nicht ändert. In Figur 2 ist die Objektivbewegung schematisch dargestellt und die Überblendung durch die schraffierte Fläche angedeutet. Die Greiferspitzen, die jeweils bei der Abwärtsbewegung in ein Perforationsloch eingreifen, sind so ausgebildet, dass sie den Film nur abwärtsstossen können. Bei der Aufwärtsbewegung gegen den Film federn die Greiferspitzen zurück.

Da der Film nur von den Greifern transportiert wird und daher genau die gleiche Bewegung macht wie die jeweils aktive Objektivhälfte, wird in jedem Zeitmoment der auf dem Leuchtschirm zeilenweise geschriebene Fernsehraster relativ stillstehend auf ein Filmbild abgebildet. Unabhängig von der Absolutbewegung des Films durchleuchtet der Leuchtpunkt das Filmbild Punkt für Punkt. Der die Photozelle erreichende Lichtstrom entspricht jeweils der Helligkeit des betreffenden Bildpunktes, und der elektrische Strom in der Photozelle stellt das zu übertragende Fernsehsignal dar.



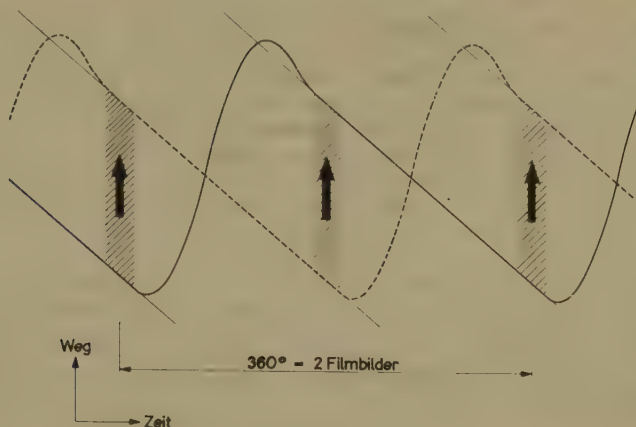
Nur während der in Figur 1 dargestellten Überblendungsphase muss der Objektivantrieb den Schrumpfungszustand des Filmes berücksichtigen. Zu diesem Zweck wird durch eine nicht dargestellte Einrichtung ständig die Filmlänge pro Bildteilung gemessen und nach dem Resultat die wirksame Länge der



Figur 1  
Prinzipschema.

beiden in Figur 1 unten dargestellten Hebel verändert, die mit ihren vorderen Enden auf den Kurvenscheiben laufen und die Objektive vertikal bewegen. Zu dieser automatischen Längenmessung wird wegen unvermeidlicher zufälliger Störungen eine integrierende Anordnung nach folgendem Prinzip verwendet: Vor dem Bildfenster wird der Film durch eine ungezähnte Rolle transportiert, die von der Kurvenscheiben-Welle aus über ein Regelgetriebe angetrieben wird. Nur wenn die Einstellung des Regelgetriebes der Filmlänge entspricht, bleibt die Länge der Filmschleife über dem Bildfenster konstant. Eine Veränderung dieser Schleife verstellt das Regelgetriebe und damit das auf den Objektivantrieb übertragene Messresultat.





Figur 2

Die Bewegung der beiden aus je einer Objektivhälfte und einem Greifer bestehenden Gebilde.

Neben den erwähnten Vorteilen aller Leuchtpunktastaster weist das neue Gerät folgende Vorteile auf:

1. Die wirksame Öffnung der Optik ist durch keine konstruktiven Gegebenheiten begrenzt.
2. Es wird nur die minimale Zahl optischer Elemente verwendet.
3. Die Anordnung erzeugt beim Überblenden keine Helligkeitsschwankungen.
4. Es entsteht relativ wenig Streulicht.
5. Die Berücksichtigung der Filmschrumpfung geschieht automatisch und ohne optische Kompromisse.
6. Durch den Greiferantrieb wurde eine Filmtransportgenauigkeit möglich, die derjenigen intermittierender Projektoren mindestens ebenbürtig ist und keine übertriebenen Präzisionsanforderungen an die Antriebsmechanik stellt.

Zum Schluss sei allen jenen gedankt, ohne die das Gerät nicht hätte gebaut werden können, allen voran dem Leiter unseres Institutes, Herrn Prof. E. BAUMANN, sodann Herrn D. DIEBOLD, dipl. El.-Ing., und der Firma Kern in Aarau, als der Herstellerin der speziellen Optik.

#### LITERATURVERZEICHNIS

TH. STUTZ, *Ein neues Verfahren zur Fernseh-Abtastung von Filmen*, Techn. Mitt. PTT 32, Nr. 1, 1 (1954).

#### Rechenautomat 704 IBM

Die International Business Machines Corporation hat kürzlich in Paris einen elektronischen Rechenautomaten vom Typus 704 in Betrieb genommen. Es handelt sich um den gegenwärtig leistungsfähigsten Rechenautomaten in Europa.

Die IBM stellt in grosszügiger Weise die Summe von ungefähr einer Million Schweizer Franken in der Form von Benutzungszeit der 704 der europäischen

Wissenschaft zur Verfügung. Für die Schweiz macht dies bis Jahresende etwa 5½ Stunden Rechenzeit auf diesem Automaten aus.

Forschungsinstitute der Hochschulen oder eventuell der Industrie können von dieser Möglichkeit Gebrauch machen. Diesbezügliche Anträge sind zu richten an den Unterzeichneten (Prof. Dr. E. STIEFEL, Eidgenössische Technische Hochschule, Zürich) oder an die IBM-France (5, Place Vendôme, Paris) direkt. Sie müssen enthalten:

1. Eine Schilderung des vorgeschlagenen wissenschaftlichen Problems.
2. Eine Beschreibung der anzuwendenden numerischen Methode für das automatische Rechnen.

3. Eine Schätzung für die beanspruchte Rechenzeit auf der 704.

Die Lösung des Problems auf der 704 muss von dem Antragsteller oder von einem durch ihn bezeichneten Bevollmächtigten vorbereitet, programmiert und in Paris durchgeführt werden. Auskunft über die Maschine 704 und die zugehörige Programmierungstechnik erteilt die Extension Suisse der IBM (Talacker 30, Zürich).

*E. Stiefel*

### **Arbeitstagung über die Ausbildung von Ingenieuren und Mathematikern in numerischer Mathematik unter Berücksichtigung der elektronischen Rechenanlagen**

In der Zeit vom 27. bis 29. Mai 1957 fand in München am Mathematischen Institut der Technischen Hochschule eine Arbeitstagung über die Ausbildung von Ingenieuren und Mathematikern in numerischer Mathematik unter Berücksichtigung der elektronischen Rechenanlagen statt, an der Deutschland, Frankreich, Österreich und die Schweiz durch Fachexperten vertreten waren.

In Referaten und Diskussionen kam übereinstimmend die Ansicht zum Ausdruck, dass die modernen Grossrechenanlagen einen massgebenden Einfluss auf die Mathematik als Ganzes, ihren Anwendungsbereich in anderen Wissenschaften und ihre Auswirkungen in Technik und Wirtschaft ausüben. Daraus ergeben sich insbesondere weitgehende Rückwirkungen auf die Gestaltung des mathematischen Unterrichts in allen Stufen.

Die Arbeitstagung empfiehlt daher ihren Teilnehmern, sich in ihren Ländern für die Erfüllung folgender Forderungen einzusetzen:

1. Stärkere Berücksichtigung des numerischen Rechnens und seiner mit den modernen Rechenanlagen verknüpften Weiterentwicklung im mathematischen Unterricht der Technischen Hochschulen und Universitäten, wobei weniger an eine Vermehrung der Stunden als an eine der neuen Entwicklung angepasste Auswahl des Stoffes gedacht wird.
2. Es wird empfohlen, das Fach «Numerische Mathematik» in die Abschlussprüfung für Mathematiker und Physiker aufzunehmen und auch den Ingenieuren in der Abschlussprüfung Gelegenheit zu geben, Kenntnisse auf diesem Gebiet nachzuweisen.
3. Auch an den mittleren und höheren Schulen ist eine Reform und Vertiefung des Unterrichts im numerischen Rechnen erforderlich, welche hauptsächlich durch eine richtige Ausbildung der Lehramtskandidaten und eine entsprechende Orientierung der bereits tätigen Lehrer erreicht werden muss.

Es sei auch darauf hingewiesen, dass sich durch den zunehmenden Einsatz der modernen Rechenanlagen in Wissenschaft, Technik und Wirtschaft erfolg-

versprechende Berufsaussichten für die Absolventen mittlerer und höherer Schulen ergeben.

Die Teilnehmer der Tagung sind übereingekommen, zu gegebener Zeit neuerdings zusammenzutreten, um über die in den einzelnen Ländern inzwischen getroffenen Massnahmen zu berichten und weitere Erfahrungen auszutauschen.

CREMER, SAUER, STRUBECKER, WALTHER (Deutschland)

DURAND, KUNTZMANN (Frankreich)

INZINGER (Österreich)

STIEFEL (Schweiz)

### Buchbesprechungen – Book Reviews – Notices bibliographiques

**Plane Waves and Spherical Means.** *Applied to Partial Differential Equations.* Von FRITZ JOHN (Interscience Publishers, New York 1955). 172 S., 10 Fig.; \$4.50.

Das Gebiet der partiellen Differentialgleichungen ist trotz seiner grossen praktischen Bedeutung auch heute noch voll ungelöster Probleme, und die Zahl der sich in den verschiedenen Zeitschriften damit befassenden Arbeiten ist beachtlich. FRITZ JOHN gibt in seinem Buch eine Zusammenfassung einiger Resultate, die sich unter gewissen einheitlichen Gesichtspunkten, nämlich mittels elementarer Identitäten zwischen Integralmitteln, gewinnen lassen. In einem ersten Teil wird die Zerlegung beliebiger Funktionen in Funktionen vom Typus ebener Wellen (Radon-Transformation) betrachtet und auf das Anfangswertproblem homogener hyperbolischer Gleichungen mit konstanten Koeffizienten sowie auf die Konstruktion von Fundamentallösungen im Kleinen von linearen elliptischen Gleichungen und Systemen mit analytischen Koeffizienten angewendet. In einem gewissen Sinne eine Verallgemeinerung bedeutet die Heranziehung von sphärischen Mitteln, die im anschliessenden Teil erfolgt und benützt wird, um die Differenzierbarkeit der Lösungen von linearen und nichtlinearen elliptischen Gleichungen und Systemen mit genügend regulären Koeffizienten sowie die Analytizität der Lösung im Falle analytischer Koeffizienten zu beweisen.

Die Darstellung ist sehr übersichtlich und so elementar als möglich gehalten. Das Buch dürfte alle, die mit partiellen Differentialgleichungen zu tun haben, interessieren.

*E. Roth-Desmeules*

**Continuous Transformations in Analysis.** Von T. RADO und P. V. REICHELDERFER ([Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Bd. 75] Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg 1955). 442 S., 53 Abb.; DM 59.60.

Nach Überlegungen von BANACH, VITALI und andern lassen die fundamentalen Begriffe der beschränkten Variation, der absoluten Stetigkeit und der Ableitung einer reellen Funktion mit mehreren Variablen eine geometrische Deutung zu, und zwar im Bereich der Transformationen in einem  $n$ -dimensionalen euklidischen Raum, die durch die reellwertigen stetigen Funktionen gestiftet werden. Das vorliegende Werk setzt sich zum Ziel, die topologischen und masstheoretischen Grundlagen der Theorie der reellen Funktionen von diesem Standpunkt aus systematisch darzustellen. Die erforderlichen Hilfsmittel aus der Topologie und der Gruppentheorie werden kurz zusammengestellt, ebenso, jedoch bedeutend ausführlicher, die Begriffe der algebraischen Topologie. Obwohl die Verfasser in erster Linie die allgemeine Theorie im  $n$ -dimensionalen Raum bieten, werden

noch die Fälle  $n = 1$  und  $n = 2$  gesondert behandelt. – Die grundlegende Idee der stetigen Transformationen findet beispielsweise in der Variationsrechnung Anwendung. Das Buch wendet sich – im Hinblick auf die Darstellung – vorwiegend an Mathematiker und Studierende der Mathematik, doch spielen die stetigen Transformationen natürlich in der angewandten Mathematik ebenfalls eine Rolle, so dass sich auch etwa die Physiker theoretischer Richtung dafür interessieren werden.

*E. Roth-Desmeures*

**Photoconductivity Conference.** Herausgegeben von R. G. BRECKENRIDGE, B. R. RUSSELL, und E. E. HAHN (John Wiley & Sons, New York 1956). 653 S., 210 Abb.; \$ 13.50.

Im November 1954 trafen sich auf dem Gebiete der Photoleitung führende Wissenschaftler aus verschiedenen Ländern in Atlantic City, um die ständig an Wichtigkeit zunehmenden Probleme der Photoleitung zu diskutieren. Als Resultat dieser Diskussionen liegt heute ein dreissig Vorträge umfassendes Buch vor uns. Trotzdem ein solcher Konferenzbericht nicht die Einheitlichkeit eines Lehrbuches besitzen kann, gelang es den Herausgebern durch geschickte Gliederung der behandelten Themen, über die blosse Berichterstattung hinaus eine auch dem Nichtfachmann zugängliche Einführung in das vielschichtige Gebiet der Photoleitung zu geben, ohne dass dabei die Aktualität der Vorträge gelitten hat.

Im 1. Teil wird in zwei Arbeiten die phänomenologische Theorie der Photoleitung behandelt. Der 2. Teil befasst sich in sechs Vorträgen mit den komplizierten Lichtabsorptionsprozessen in Kristallen. Die sechs Arbeiten des 3. Teils setzen sich mit dem Verhalten der durch Lichtabsorption befreiten Ladungsträger in Festkörpern auseinander. Im 4. Teil werden die Eigenschaften verschiedener Photoleiter diskutiert, und schliesslich folgen im letzten Teil neun Referate über neueste experimentelle Ergebnisse an verschiedenen Photoleitern.

Das Buch ergänzt in hervorragender Weise die recht spärlich vorhandene Literatur über Photoleiter.

*E. Mooser*

**Science and Information Theory.** Von LEON BRILLOUIN (Academic Press Inc., New York 1956). 320 S., 74 Fig.; \$ 6.80.

In zwanzig Kapiteln werden in sehr konzentrierter Form die wesentlichen Aspekte der Informationstheorie und ihrer Anwendung in verschiedenen Gebieten der Wissenschaft dargestellt. Der formalen Analogie des Begriffes Information mit demjenigen der negativen Entropie der Thermodynamik wird eine eingehende Betrachtung gewidmet und werden diejenigen Fälle betrachtet, bei denen sich eine tatsächliche Übereinstimmung ergibt. Der Begriff Negentropie wird aber auch dort angewandt, wo kein Zusammenhang mit der Thermodynamik besteht, nämlich in der Übertragung von Sprache in Laut und Schrift.

Ausgehend von der Definition der Information nach SHANNON wird die Anwendung generell diskutiert und am Beispiel der englischen Sprache erläutert. Das Prinzip der Kodierung, die Kapazität eines Übertragungskanal, allgemeine Kodierungsprobleme, fehleranzeigende und -korrigierende Kode folgen. Mit einem Kapitel über Signalanalyse mittelst Fourier-Methoden und Zeitauslese und einem weiteren die thermodynamischen Prinzipien zusammenfassend, sind damit alle Grundlagen zusammengestellt. Thermische Agitation, Brownsche Bewegung, Thermisches Rauschen in elektrischen Kreisen (Nyquist-Formel) finden eine kurze Darstellung. Es folgen Betrachtungen, welche dem Autor besonders zusagen, nämlich das Negentropie-Prinzip der Information, das Problem von Maxwells Dämon, die Anwendung des Negentropie-Prinzips der Information



in der Physik und Beobachtung und Information. Im letzten Viertel des Buches werden noch folgende interessante Themen behandelt: Informationstheorie in Zusammenhang mit der Unbestimmtheitsrelation und physikalische Grenzen der Beobachtung; das Negentropie-Prinzip der Information in der Übertragungstechnik; Schreiben, Drucken und Lesen; das Problem des Rechnens (Rechenmaschinen) und zum Schluss etwas über Information und Organisation und über Probleme, welche ausserhalb des Bereichs der Informationstheorie liegen.

Das vorliegende Werk ist heute das einzige, welches eine umfassende und konzentrierte Darstellung der Informationstheorie mit ihren vielfachen Anwendungen gibt. Auf die Originalaufsätze wird mit Fussnoten hingewiesen. Das Buch entspricht einem wirklichen Bedürfnis, und wir können dem Verfasser für seine Arbeit sehr dankbar sein.

H. Weber

**Handbuch der Physik.** Herausgegeben von S. FLÜGGE. Bd. 14: *Kältephysik I* (Springer-Verlag, Berlin 1956). 349 S., 215 Fig.; DM 72.—.

Dieser erste der zwei Bände über *Kältephysik* enthält fünf englisch geschriebene Artikel.

J. G. DAUNTS Bericht über die Herstellung tiefer Temperaturen – bis Wasserstofftemperaturen – bildet eine für Physiker äusserst nützliche Darstellung der Gasverflüssigungsprobleme. Die wichtigsten Methoden sind so beschrieben, dass der Tatsache, dass Physiker und Kältephysiker keine Kälteingenieure sind, Rechnung getragen wird. S. C. COLLINS Diskussion über Heliumverflüssiger, deren industrielle Herstellung er massgebend gefördert hat, enthält eine interessante Übersicht über moderne Methoden. D. K. C. MACDONALD berichtet in einfacher Form über die Phänomene der elektrischen Leitfähigkeit bei tiefsten Temperaturen. Die Beschreibung experimenteller Methoden seines Laboratoriums dürfte für viele nützlich sein. K. G. KLEMENS bearbeitet die Wärmeleitfähigkeiten. Angesichts der vielen experimentellen Untersuchungen der letzten Jahre ist seine Zusammenfassung der Resultate vom theoretischen Standpunkt aus sehr begrüssenswert. P. H. KEESOM und N. PEARLMAN berichten über spezifische Wärmen.

Die Hauptschwierigkeit bei der Herausgabe lag aber offenbar in der Platzbeschränkung. Der Leser hätte es begrüsst, wenn die Aufsätze noch ausführlicher wären.

J. L. Olsen

**Verformung und Fliessen des Festkörpers.** Kolloquium Madrid, 26.–30. September 1955. Herausgegeben von R. GRAMMEL (Springer-Verlag Berlin, Göttingen und Heidelberg 1956). 324 S., 188 Abb.; DM 37.50.

Das Buch enthält die Vorträge und Diskussionsbeiträge vom Madrider Kolloquium 1955, das von der Internationalen Union für Theoretische und Angewandte Mechanik unter dem Vorsitz von R. GRAMMEL mit dem Zweck durchgeführt worden ist, eine engere Zusammenarbeit zwischen Mechanikern und Festkörper-Physikern anzubahnen. Es gliedert sich in die folgenden Themata: 1. Versetzungen und Plastizität; 2. Nichtlineare Elastizität und Vermischtes; 3. Viskoelastizität und Relaxation.

Von den insgesamt 33 Beiträgen seien im folgenden nur die allgemeinen Vorträge genannt:

1. G. I. TAYLOR, *Strains in Crystalline Aggregate*. A. H. COTTRELL, *Dislocations in Crystals*. A. SEEGER, *Neuere mathematische Methoden und physikalische Ergebnisse zur Kristallplastizität*. P. G. HODGE jr., *The Theory of Piecewise Linear Isotropic Plasticity*.



2. H. KAUDERER, *Ein nichtlineares Elastizitätsgesetz*; Aufbau und Anwendungsmöglichkeiten. L. R. G. TRELOAR, *Large Elastic Deformations in Rubberlike Materials*.

3. M. A. BIOT, *Variational and Lagrangian Methods in Viscoelasticity*. F. SCHULTZ-GRUNOW, *Viskosität und Zeitwirkungen im nichtlinearen Bereich*.  
H. Ziegler

**Präzisionsmessungen von Kapazitäten, Induktivitäten und Zeitkonstanten.** Von E. BLECHSCHMIDT. Band I (Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig 1956). 166 S. 84 Abb.; DM 11.80.

In der Sammlung «Verfahren und Messkunde der Naturwissenschaft» ist soeben die zweite neubearbeitete Auflage der Monographie von ERICH BLECHSCHMIDT erschienen, welche die vielfach zerstreuten Mitteilungen über die Verfahren zur Präzisionsmessung von Kapazitäten und dielektrischen Verlusten in übersichtlicher und knapper Form zusammenfasst. Der völlig neue Teil über Induktivitätsmessungen wird als Heft 14 II in Kürze erscheinen. Das kleine Werk enthält als Einleitung eine Übersicht über die Begriffe der Kapazität der Dielektrizitäts-Konstante sowie der Einheiten. Nach einer Diskussion der Kapazitätsnormale werden die Messmethoden und die verschiedenen Brückenanordnungen eingehend behandelt.

Die vorliegende kritische Zusammenstellung dürfte vor allem für Physiker und Ingenieure von Nutzen sein, erlaubt sie doch eine rasche und zuverlässige Orientierung über die zahlreichen Faktoren, welche die Genauigkeit solcher Messungen beeinflussen können.  
E. Baldinger

**Advances in Electronics and Electron Physics.** Von L. MARTON. Band 6 (Academic Press Inc., New York 1954). 538 S., 203 Fig.; \$11.80.

Die von L. MARTON herausgegebene, jährlich erscheinende Sammlung von zusammenfassenden Berichten trägt neuerdings den erweiterten Titel «Advances in Electronics and Electron Physics». Damit soll deutlich gesagt sein, dass auch rein wissenschaftliche Belange aus der Physik des Elektrons zur Sprache kommen, Fragen also, die ausserhalb des Rahmens dessen stehen, was heute landläufig unter Elektronik verstanden wird. Dies geht auch für Band 6 aus den Titeln der Beiträge hervor (Beitrag 2 und 8):

A. B. PIPPARD, *Metallic Conduction at High Frequencies and Low Temperatures*; E. ABRAHAMS, *Relaxation Processes in Ferromagnetism*; J. SMIT und H. P. J. WIJN, *Physical Properties of Ferrites*; H. F. IVEY, *Space Charge Limited Currents*; W. M. WEBSTER, *A Comparison of Analogous Semiconductor and Gaseous Electronics Devices*; M. E. HAINE, *The Electron Microscope – A Review*; R. G. E. HUTTER, *Traveling-Wave Tubes*; J. VAN DEN HANDEL, *Paramagnetism*.

Im Grunde genommen hat sich jedoch an der Art der Auswahl nichts geändert, zeigen doch auch die früheren Bände die gleiche wertvolle Tendenz, den nur für angewandte Elektronik interessierten Leser aus seinem engeren Gebiet herauszuführen und damit der überhandnehmenden Spezialisierung entgegenzuwirken. Schon aus diesem Grunde ist auch dem vorliegenden Bande ein weiterer Leserkreis zu wünschen.  
A. A. Rusterholz

**Elements of Statistics.** Von H. C. FRYER (John Wiley & Sons, New York 1954). 262 S., 34 Fig.; \$4.75.

Das Buch stellt einen modernen Lehrgang der mathematischen Statistik für Nichtmathematiker, die keine Vorkenntnisse auf diesem Spezialgebiet besitzen, dar. Vorerst werden die Begriffe Wahrscheinlichkeit und mathematische Erwar-

tung erläutert und die wichtigsten statistischen Masszahlen eingeführt. Nach der Besprechung der Binomial- und Normalverteilung werden verschiedene Schätzungs- und Testverfahren, insbesondere  $\chi^2$ - und  $t$ -Test, behandelt, dann werden die Fragen der linearen Regression und Korrelation besprochen. Es wird versucht, dem Leser den zentralen Grenzwertsatz der Wahrscheinlichkeitsrechnung und seine Auswirkungen auf die Anwendbarkeit der statistischen Methoden klarzumachen. Der Autor hat sich bemüht, mit möglichst wenig Mathematik auszukommen, und hat um so grösseres Gewicht auf grundsätzliche Fragen gelegt. Vor allem wird der Leser immer wieder auf die Voraussetzungen aufmerksam gemacht, auf denen die behandelten Verfahren beruhen. Der Text wird durch sehr viele Beispiele erläutert, die aus den verschiedensten Anwendungsgebieten der Statistik ausgewählt worden sind. Diesem Lehrbuch ist eine möglichst grosse Leserschaft vor allem in den Kreisen der Naturwissenschaftler zu wünschen.

*P. Schmid*

**Progress in Low Temperature Physics**, Vol. I. Herausgegeben von C. J. GORTER (North Holland Publishing Company, Amsterdam 1955). 418 S., 177 Fig.; hfl. 30.50 (61 sh, \$ 8.-).

In 18 Artikeln schreiben 21 führende Kältephysiker über ihre Spezialgebiete. Etwa die Hälfte des Buches ist den Erscheinungen der Superfluidität und Supraleitung gewidmet. Der Rest befasst sich mit Para-, Ferro- und Antiferromagnetismus und einigen andern, etwas willkürlich ausgewählten Themen.

Inhalt und Form der Artikel sind recht verschiedenartig. Die Themen sind zum Teil allgemeiner, zum Teil sehr spezieller Natur. Unabhängig davon vermitteln die einen Autoren unter vollen Literaturangaben eine umfassende kritische Übersicht über den gegenwärtigen experimentellen und theoretischen Stand ihres Gebietes, während andere sich mit knappen und skizzenhaften Darstellungen begnügen, deren Wert zum Teil etwas fragwürdig ist. Fast alle Artikel betreffen bereits publiziertes Material. R. P. FEYNMAN's Kapitel über flüssiges Helium jedoch ist eine neue und originelle Arbeit. Dafür ist sie einseitig und weit davon entfernt, eine wirkliche Übersicht zu geben.

Im ganzen lässt sich sagen, dass es sich um ein heterogenes, aber interessantes und in mancher Hinsicht nützliches Buch handelt.

*A. Thellung*

**Handbuch der Physik - Encyclopedia of Physics**. Bd. 15: Kältephysik II. Herausgegeben von S. FLÜGGE (Springer-Verlag, Berlin 1956). 477 S., 318 Fig.; DM 112.-.

Nach einer Einführung in die magnetischen Eigenschaften bei tiefen Temperaturen (J. VAN DEN HANDEL) gibt D. DE KLERK einen umfassenden Überblick über Theorie und Methode der adiabatischen Entmagnetisierung, in welchem auf die Eigenschaften der verschiedenen hierfür geeigneten Salze ausführlich eingegangen wird. Den experimentellen Teil der Supraleitung behandelt B. SERIN, die Theorie J. BARDEEN, wobei besonderes Gewicht natürlich auf die Londonsche Theorie und den Zwischenzustand gelegt wird. Den Abschluss bildet eine Darstellung der Eigenschaften des flüssigen Heliums mit besonderer Berücksichtigung von Helium II (K. MENDELSSOHN). Dem vollständig in englischer Sprache abgefassten Text liegt im allgemeinen die bis 1955 bekannte Literatur (insgesamt rund 1200 Zitate) zugrunde, jedoch enthalten Nachträge auch Arbeiten von 1956. Leider konnte nicht mehr berücksichtigt werden, dass es inzwischen gelungen ist, durch Kernentmagnetisierung Temperaturen von etwas über  $10^{-6}$  °K zu erreichen. Zusammen mit dem ersten Teilband der Kältephysik wird so ein umfassender Überblick der Physik der tiefsten Temperaturen gegeben, wobei der vorlie-



gende Band fast ausschliesslich Erscheinungen gewidmet ist, die im Gebiet des flüssigen Heliums oder der adiabatischen Entmagnetisierung zu beobachten sind. Im Hinblick auf die recht gediegene Arbeit der Autoren ist der hohe Preis des Bandes, der manchen Interessenten vom Kauf abhalten dürfte, zu bedauern.

*P. Grassmann*

**Quantum Chemistry.** Von WALTER KAUFMANN (Academic Press Inc., New York 1957), 744 S., 160 Fig., \$12.00.

Das vorliegende Buch wendet sich an Chemiker, die nur mässige mathematische Kenntnisse haben und sich über die Anwendungen der Quantenmechanik in der Chemie orientieren möchten. Vorausgesetzt werden nur die elementarsten Grundlagen der Analysis; die in diesem Buche benötigten mathematischen Hilfsmittel werden in einem einleitenden Kapitel in einfachster Weise entwickelt und an Beispielen der Physik ausserhalb der Quantenmechanik ausführlich erörtert (138 Seiten). Nach einer nicht sehr tiefeschürfenden Einführung in die Quantenmechanik (118 Seiten) werden atomare Systeme (98 Seiten) und die Theorie der chemischen Bindung (142 Seiten) behandelt. Ein Exkurs über nichtstationäre Systeme (203 Seiten), in dem im wesentlichen die Wechselwirkung der Materie mit der elektromagnetischen Strahlung behandelt wird, beschliesst das Buch. Die Darstellung ist durchweg sehr breit. Die Anwendung gruppentheoretischer Methoden, die das Verständnis der meisten hier behandelten Fragen ausserordentlich erleichtert und vertieft hätten, wurde durchweg vermieden. Der Autor schreibt im Vorwort: 'The primary aim of this book is to help chemists understand the more important concepts that quantum mechanics has introduced into chemistry. A secondary aim is to examine critically the limitations of many of these concepts'. Im Gegensatz zum ersten Ziel dürfte nun leider das zweite nicht in dem wünschbaren Masse erreicht worden sein. Es ist zwar sicherlich nicht einfach, die Gültigkeitsgrenzen der in der Quantenchemie angewandten Approximationen aufzuweisen; eine sorgfältigere und kritischere Behandlung dieser Fragen, insbesondere bei den Problemen der chemischen Bindung, wäre aber gerade für diejenigen Leser, an die sich dieses Buch wendet, ausserordentlich wichtig gewesen.

*H. Primas*

**Théorie des circuits de télécommunication.** Von VITOLD BÉLEVITCH (Ch. Uystpruyst, Librairie Universitaire, Louvain 1957). 384 S., 339 Fig.; bFr. 450.—.

Das vorliegende Buch behandelt in sehr gedrängter Form den heutigen Stand der Theorie der linearen elektrischen Netzwerke. W. CAUER, H. W. BODE und E. A. GUILLEMIN stehen der Arbeit zu Gevatter, doch sind viele Entwicklungen in origineller Weise abgewandelt, meist zum Vorteil des Lesers. Die Auswahl des Stoffes, seine Anordnung und Behandlung verraten die Vertrautheit des Verfassers mit der Materie. Leider haben sich eine ganze Anzahl kleiner Druckfehler ausser den im Errata aufgeführten eingeschlichen.

Neben den notwendigen einführenden Definitionen werden die Wellenparameter, die allgemeine Theorie der passiven Netzwerke, die klassische Filtertheorie, die moderne mit gegebenem Betriebsverhalten, die Spulen und Transformatoren und der gegengekoppelte Verstärker behandelt. Ergänzende Betrachtungen zur Synthese von passiven Netzwerken, Einschwingvorgängen und eine kommentierte Übersicht der Literatur vervollständigen in wertvoller Weise den Inhalt. Das Buch füllt eine Lücke im französischen Sprachgebiet und kann dem theoretisch interessierten Fachmann sehr nützlich sein.

*H. Weber*

# Kerninduktions- Spektrograph



zur routinemässigen  
Aufzeichnung von  
Kerninduktions-  
Spektren mit höchster  
Auflösung



TRÜB, TÄUBER · ZÜRICH

Prof. Dr. A. TIMPE

## Einführung in die Finanz- und Wirtschaftsmathematik

VI, 217 S., DIN A 5, 2. Auflage

Ganzleinen mit Schutzumschlag

DM 17.80

Verbilligte brosch. Ausgabe für Studenten

DM 11.—

Neben den in der einschlägigen Buchliteratur überwiegend behandelten Angelegenheiten des Geld- und Zahlungsverkehrs werden hier auch Devisenausgleichsfragen, Versicherungsmathematik, Tarifmathematik behandelt, weiterhin Erfolgsrechnung (Einfluss des Beschäftigungsgrades), Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik in Anwendung auf Wirtschaftsprobleme, anschliessend Korrelationsrechnung und Analyse von Zeitreihen (Trendbestimmung usw.).

Das Buch wendet sich an Wirtschaftsingenieure, Versicherungswissenschaftler, Statistiker, an Mathematiker in Banken, Bausparkassen, Tarifmathematiker in Verkehrsunternehmen, öffentlichen Versorgungsbetrieben, an Studenten der Wirtschaftswissenschaft. Was die beim Leser vorausgesetzten mathematischen Kenntnisse angeht, so gehen sie im allgemeinen nicht über das hinaus, was beim Absolventen eines guten Realgymnasiums erwartet werden kann. Das Buch wendet sich daher nicht etwa nur an Mathematiker, sondern ebenso an solche, die an Hochschulen oder in der Praxis in wirtschaftswissenschaftlicher Richtung arbeiten. Vielleicht bietet es auch Lehrern der höheren Schulen und der Handelsschulen einige Anregungen für die Ausgestaltung des Unterrichts.

Verlag für angewandte Wissenschaften, Baden-Baden, Hardstr. 1c

## Statistische Methoden für Naturwissenschaftler, Mediziner und Ingenieure

Von Dr. ARTHUR LINDER, Professor an der Universität Genf und an der ETH in Zürich. — 298 Seiten mit 43 Figuren. Sammlung „Lehrbücher und Monographien aus dem Gebiete der exakten Wissenschaften“. — Mathematische Reihe, Band 3.

*Nachdruck 1957 der zweiten, erweiterten Auflage 1951.*

Ganzleinen Fr./DM 31.20, broschiert Fr./DM 27.05.

BIRKHÄUSER VERLAG · BASEL UND STUTTGART



## MTW Mitteilungen

### Schriftleitung:

R. Inzinger (Wien) unter Mitwirkung von  
L. Collatz (Hamburg), J. Heinhold (München),  
R. Sauer (München), E. Stiefel (Zürich),  
A. Walther (Darmstadt).

Zeitschrift zur Pflege der  
Beziehungen zwischen  
**Mathematik, Technik, Wirtschaft**

### Inhalt:

Beiträge, Tagungsberichte, Erfahrungs-  
berichte, Bearbeitungsroutinen, Labor-  
mitteilungen, Informationen, GAMM-Mit-  
teilungen, Buchbesprechungen, Zeit-  
schriftendienst, Literaturberichte.

### Erscheinungsweise:

Sechsmal jährlich in den Monaten Jänner,  
März, Mai, Juli, September, November.

### Jahresabonnement:

Österreich S 50.-

Deutsche Bundesrepublik DM 10.-

Schweiz sFr. 10.-

Übriges Ausland \$ 2.50

Die MTW-Mitteilungen können durch  
jede Buchhandlung oder unmittelbar  
durch das Mathematische Labor der  
Technischen Hochschule Wien, Wien IV,  
Karlsplatz 13, Österreich, bezogen wer-  
den. Von dort können auch kostenlos  
Probenummern angefordert werden.

## MTW Berichte

In Kürze erscheinen:

Einzelschriften zur Pflege der  
Beziehungen zwischen  
**Mathematik, Technik, Wirtschaft**

Heft 1: R. Inzinger: Das Mathematische  
Labor der Technischen Hochschule  
Wien (in Vorbereitung).

Heft 2: K. Neumaier-R. Inzinger-H. Kasper:  
Moderne Rechenhilfsmittel im Dienste  
des Vermessungswesens.

## MTW Tabellen

Tabellen aus  
**Mathematik, Technik, Wirtschaft**

### Herausgeber:

Mathematisches Labor  
Technische Hochschule Wien